

Acest manual este proprietatea Ministerului Educației și Cercetării.

Acest proiect de manual școlar este realizat în conformitate cu Programa școlară aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Numărul **119** – număr unic
de telefon la nivel național pentru
cazurile de abuz împotriva copiilor și
116.111 – numărul de telefon
de asistență pentru copii

Ministerul Educației și Cercetării

Mihaela Singer
(coordonator)

Cristian Voica

Sorin Borodi

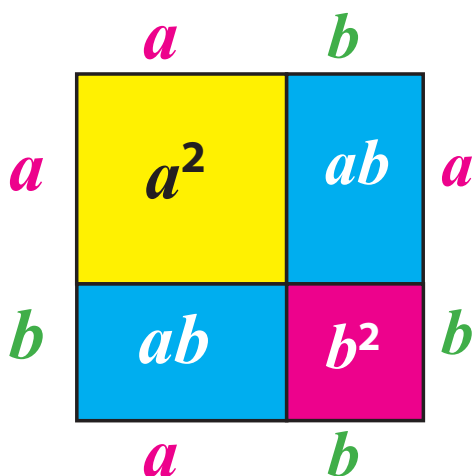
Emilia Iancu

Maria Popescu

Marcel Stan

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a VIII-a



Manualul școlar a fost aprobat prin Ordinul de Ministru al Educației și Cercetării nr. 6400/22.09.2025.
Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și în format digital, și este transmisibil timp de patru ani școlari, începând din anul școlar 2025-2026.

Inspectoratul Școlar

Școala / Colegiul / Liceul

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE:

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul școlar	Aspectul manualului*			
				Format tipărit		Format digital	
				la primire	la predare	la primire	la predare
1							
2							
3							
4							

* Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni: **nou, bun, îngrijit, neîngrijit, deteriorat.**

Cadrele didactice vor verifica dacă informațiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.

Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

Referenți: Prof. univ. dr. Victor Vuletescu
Prof. grad I Maria-Adriana Leșe
Prof. grad I Leonard Mihai Giugiuc
Prof. grad I Anca Toșa
Prof. grad I Maria Dan

Redactor: Mihaela Singer

Tehnoredactare: Daniela Manolescu, Tudor Stănică,
Roxana Coste, Adrian-Viorel Rașca

Coperta: Tudor Stănică, Adrian-Viorel Rașca

Credite foto: pixabay.com; freepik.com;
wikipedia.org; commons.wikimedia.org;
pxhere.com; flickr.com; vecteezy.com,
http://concordia.construction.

Platforma e-learning, activități digitale interactive, voce, procesare sunet și animații: IMAGINE INFINITY SRL.

ISBN: 978-606-727-666-4

© **2025 – EDITURA SIGMA**

Toate drepturile asupra prezentei ediții aparțin Editurii SIGMA. Nicio parte a acestei lucrări nu poate fi reprodusă fără acordul scris al Editurii SIGMA.

Editura SIGMA

Sediul central:

Str. Nicolae Cartojan, nr. 11-13, sector 2,
București, cod poștal 023815
Tel.: 0758 044 829; 0723 541 020
E-mail: office@editurasigma.ro
Web: editurasigma.ro

Distribuție:

Str. Nicolae Cartojan, nr. 11-13, sector 2,
București, cod poștal 023815
Tel.: 0758 044 825; 0758 044 828
E-mail: comenzi@editurasigma.ro

Competențe generale și specifice

Manualul de matematică pentru clasa a VIII-a contribuie la formarea următoarelor competențe:

Competențe generale:

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar;
2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale;
3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice;
4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată;
5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date;
6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii.

Competențe specifice:

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none">1.1. Recunoașterea apartenenței unui număr real la o mulțime;1.2. Identificarea componentelor unei expresii algebrice;1.3. Identificarea unor dependențe funcționale în diferite situații date;1.4. Identificarea unor figuri plane sau a unor elemente caracteristice acestora în configurații spațiale date;1.5. Identificarea corpurilor geometrice și a elementelor metrice necesare pentru calcularea ariei sau a volumului acestora;2.1. Efectuarea unor operații cu intervale numerice reprezentate pe axa numerelor sau cu mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor ei;2.2. Aplicarea unor reguli de calcul cu numere reale exprimate prin litere;2.3. Descrierea unei dependențe funcționale într-o situație dată, folosind diagrame, tabele sau formule;2.4. Reprezentarea, prin desen sau prin modele, a unor configurații spațiale date;2.5. Prelucrarea unor date caracteristice ale corpurilor geometrice studiate în vederea calculării unor elemente ale acestora;3.1. Utilizarea unor procedee matematice pentru operații cu intervale și rezolvarea inecuațiilor în $\mathbb{R}$;3.2. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat și a unor algoritmi pentru rezolvarea ecuațiilor și a inecuațiilor;3.3. Reprezentarea în diverse moduri a unor funcții cu scopul caracterizării acestora;3.4. Folosirea unor proprietăți de paralelism sau perpendicularitate pentru analizarea pozițiilor relative ale dreptelor și planelor;3.5. Alegerea metodei adecvate pentru calcularea unor caracteristici numerice ale corpurilor geometrice. | <ol style="list-style-type: none">4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunilor de mulțime, de interval numeric și de inecuații;4.2. Exprimarea matematică a unor situații concrete prin calcul algebric;4.3. Utilizarea unui limbaj specific pentru formularea unor opinii referitoare la diferite dependențe funcționale;4.4. Descrierea în limbaj matematic a elementelor unei configurații geometrice;4.5. Utilizarea unor termeni și expresii specifice pentru descrierea proprietăților figurilor și corpurilor geometrice;5.1. Interpretarea unei situații date utilizând intervale și inecuații;5.2. Interpretarea unei situații date utilizând calcul algebric;5.3. Analizarea unor funcții în context intra și interdisciplinar;5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea descrierii unor configurații spațiale și a calculării unor elemente metrice;5.5. Analizarea condițiilor necesare pentru ca o configurație geometrică spațială să verifice anumite cerințe date;6.1. Rezolvarea unor situații date, utilizând intervale numerice sau inecuații;6.2. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea ecuațiilor sau a formulelor de calcul prescurtat;6.3. Modelarea cu ajutorul funcțiilor a unor fenomene din viața reală;6.4. Modelarea unor situații practice în limbaj geometric, utilizând configurații spațiale;6.5. Interpretarea informațiilor referitoare la distanțe, arii și volume după modelarea printr-o configurație spațială a unei situații date din cotidian. |
|---|--|

Le dorim profesorilor mult succes, iar elevilor, să parcurgă acest manual cu interes, plăcere și încredere, iar competențele dobândite în clasa a VIII-a să le fie de folos în întreaga lor carieră!

Cuprins

Cum lucrezi cu manualul?.....	6-7
Recapitulare prin probleme	8-11

UNITATEA 1: MULTIMI DE NUMERE REALE. INTERVALE

1.1. 2.1. 3.1.
4.1. 5.1. 6.1.

Proiect: <i>Construcții</i> . Test inițial	12-13
1. Mulțimi de numere. Mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor lor	14-16
2. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor	17-19
3. Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor.....	20-22
4. Operații cu intervale de numere reale.....	23-25
5. Inecuații de forma $ax + b > 0$ ($\leq, <, \geq$), unde a și b sunt numere reale.....	26-28
6. Inecuații reducibile la forma $ax + b > 0$ ($\leq, <, \geq$), cu $a, b \in \mathbb{R}$	29-31
Recapitulăm prin probleme. Teste sumative.....	32-33

UNITATEA 2: CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$. OPERAȚII CU NUMERE REALE REPREZENTATE PRIN LITERE. REZOLVĂRI DE ECUAȚII

1.2. 2.2. 3.2.
4.2. 5.2. 6.2.

Proiect: <i>Alegebră... geometrică</i> . Test inițial	34-35
1. Folosirea literelor în calcule	36-37
2. Adunarea, scăderea și înmulțirea numerelor reale reprezentate prin litere	38-41
3. Ridicarea la putere și împărțirea numerelor reale reprezentate prin litere	42-44
4. Ordinea efectuării operațiilor în exerciții cu numere reale exprimate prin litere	45-47
5. Calcul prescurtat. Formule pătratice.....	48-49
6. Formule de calcul prescurtat. Produsul de sumă prin diferență	50-51
7. Descompunerea în factori. Factor comun	52-53
8. Descompunerea în factori. Formule de calcul prescurtat	54-55
9. Ecuatii de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde a, b, c sunt numere reale, $a \neq 0$	56-57
10. Rezolvarea ecuațiilor de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde a, b, c sunt numere reale, $a \neq 0$	58-60
Recapitulăm prin probleme. Teste sumative.....	61-63

UNITATEA 3: CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$. FRAȚII ALGEBRICE. REZOLVĂRI DE ECUAȚII

1.2. 2.2. 3.2.
4.2. 5.2. 6.2.

Proiect: <i>Ecuatii, algoritmi și scheme logice</i> . Test inițial.....	64-65
1. Frații algebrice. Amplificarea și simplificarea fracțiilor algebrice	66-67
2. Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice	68-69
3. Înmulțirea, împărțirea și ridicarea la putere a fracțiilor algebrice	70-71
4. Expresii algebrice raționale. Ordinea efectuării operațiilor	72-74
5. Ecuatii reducibile la ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde a, b, c sunt numere reale.....	75-76
6. Aplicații ale ecuațiilor de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde a, b, c sunt numere reale.....	77-79
Recapitulăm prin probleme. Teste sumative.....	80-81

UNITATEA 4: FUNȚII ȘI ELEMENTE DE STATISTICĂ

1.3. 2.3. 3.3.
4.3. 5.3. 6.3.

Proiect: <i>Turism și reprezentări</i> . Test inițial.....	82-83
1. Ce înțelegem printr-o funcție?	84-85
2. Graficul unei funcții.....	86-87
3. Funcții de forma $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, cu $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ și D o mulțime finită, $D \subset \mathbb{R}$	88-89
4. Funcții de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, cu $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$	90-91
5. Funcții de forma $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, cu $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, unde D este un interval. Interpretare geometrică.....	92-94
6. Lecturi grafice.....	95-97
7. Interpretarea datelor statistice. Frecvențe.....	98-100
8. Interpretarea datelor statistice. Indicatori ai tendinței centrale	101-103
Recapitulăm prin probleme. Teste sumative.....	104-105

UNITATEA 5: PUNCTE, DREPTE, PLANE, CORPURI GEOMETRICE. POZIȚII RELATIVE	Proiect: <i>De la plan la spațiu</i> . Test inițial.....	106-107
	1. Puncte, drepte, plane: convenții de desen și notații.....	108-109
	2. Determinarea dreptei. Determinarea planului.....	110-111
	3. Piramida: reprezentare, elemente, desfășurări.....	112-113
	4. Pozițiile relative a două drepte în spațiu.....	114-115
	5. Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan.....	116-118
	6. Pozițiile relative a două plane în spațiu. Teoreme de paralelism.....	119-121
	7. Prisma: reprezentare, elemente, desfășurări.....	122-124
	8. Secțiuni paralele cu baza în corpuri geometrice. Trunchiul de piramidă.....	125-127
	Recapitulăm prin probleme. Teste sumative.....	128-129

1.4. 2.4. 3.4.
4.4. 5.4. 6.4.

UNITATEA 6:
PERPENDICULARITATE
ÎN SPAȚIU

Proiect: <i>Paralelism și perpendicularitate</i> . Test inițial.....	130-131
1. Măsura unghiului a două drepte în spațiu	132-133
2. Dreapta perpendiculară pe plan. Distanța de la un punct la un plan	134-136
3. Înălțimea piramidei	137-138
4. Distanța dintre două plane paralele. Înălțimea prisme. Prisma dreaptă.....	139-140
5. Cilindrul circular drept, conul, trunchiul de con: reprezentare, elemente, secțiuni paralele cu baza.....	141-142
6. Proiecții ortogonale de puncte, de segmente și de drepte pe un plan.....	143-145
7. Unghiul dintre o dreaptă și un plan. Lungimea proiecției unui segment	146-147
8. Diedru. Unghi plan corespunzător unui diedru	148-150
9. Unghiul a două plane.....	151-152
10. Plane perpendiculare	153-155
11. Teorema celor trei perpendiculare.....	156-158
12. Calcularea unor distanțe în spațiu.....	159-161
Recapitulăm prin probleme. Teste sumative.....	162-163

1.4.

2.4.

3.4.

4.4.

5.4.

6.4.

1.4. 2.4. 3.4.
4.4. 5.4. 6.4.

UNITATEA 7: ARII ȘI VOLUME ALE POLIEDRELOR	Proiect: <i>Geometria în viața de zi-cu-zi</i> . Test inițial	164-165
	1. Măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate	166-169
	2. Distanțe pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate.....	170-172
	3. Arie și volum pentru cub și paralelipiped dreptunghic	173-174
	4. Aria și volumul prismelor	175-177
	5. Aria și volumul piramidei triunghiulare regulate.....	178-180
	6. Aria și volumul piramidelor regulate patrulate și hexagonale	181-183
	7. Aria și volumul trunchiului de piramidă regulată	184-186
	Recapitulăm prin probleme. Teste sumative.....	187-189

1.4.

2.4.

3.4.

4.4.

5.4.

6.4.

1.4. 2.4. 3.4.
4.4. 5.4. 6.4.

UNITATEA 8: ARII ȘI VOLUME ALE CORPURILO ROTUNDE 1.5. 2.5. 3.5. 4.5. 5.5. 6.5.	Proiect: <i>Planete și proporții</i> . Test inițial.....	190-191
	1. Cilindrul circular drept: volum, arii, secțiuni.....	192-194
	2. Conul circular drept: volum, arii, secțiuni.....	195-197
	3. Trunchiul de con circular drept: volum, arii, secțiuni.....	198-200
	4. Sfera: arie, volum.....	201-203
	Recapitulăm prin probleme. Teste sumative.....	204-205

1.5. 2.5. 3.5.
4.5. 5.5. 6.5.

TESTE DE ANTRENAMENT PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ.....	206-215
INDICAȚII DE REZOLVARE ȘI RĂSPUNSURI.....	216-224

Cum lucrezi cu manualul?

Manualul conține opt unități de învățare organizate conform programei școlare. La acestea se adaugă o unitate inițială, dedicată recapitulării din clasele a V-a – a VII-a, ce te ajută să organizezi un portofoliu care îți va permite pregătirea eficientă pentru *Evaluarea națională*. Apoi, fiecare unitate de învățare cuprinde: un proiect, teste de evaluare inițială, lecții de predare-învățare, investigații, probleme recapitulative, sinteza unității cu temele esențiale pentru portofoliu și teste de evaluare finală. La finalul manualului, vei întâlni teste de evaluare de tipul celor de la Evaluarea Națională.

Pagina de început a fiecărei unități de învățare prezintă un **proiect** de realizat pe parcursul unității, precum și o **probă de autoevaluare** pentru a vedea ce știi din ceea ce va fi necesar în noua unitate.

Situația-problemă și rezolvarea ei îți arată cum se modelează matematic probleme din cotidian sau din alte domenii, folosind noile cunoștințe din lecție. Totodată, situația-problemă te conduce să înțelegi la ce sunt utile noile informații.

Etapele proiectului

Unitatea de învățare 1 Mulțimi de numere reale. Intervaie

Proiect: Construcții

Plan de lucru

- Scop: Vei realiza o mini-culegere de probleme referitoare la arhitectură și construcții.
- Materiale necesare: coli de hârtie, creioane, calculator.

Realizarea proiectului

Lucrați în echipe de trei, patru sau cinci colegi!

- Pentru problemele marcate cu simbolul de proiect în cadrul unității, propuneți și rezolvați o problemă asemănătoare, pe care puteți să o includeți în mini-culegere.
- Căutați pe Internet date despre construcții recente din țara noastră. Comparați dimensiuni sau reconstruiți.
- Identificați în diverse surse (manual, culegeri), sau propuneți voi probleme despre diverse construcții. Rezolvați problemele.

Pentru început:

- Rezolvați problemele care urmează.

1. O macara a fost proiectată să transporte panouri de beton armat de formă paralelipipedică având dimensiunile maxime de $4\text{ m} \times 3\text{ m} \times 20\text{ cm}$ și masa maximă de o tonă. Care dintre panourile cu parametri menționați mai jos pot fi transportate?

a) $300\text{ cm} \times 300\text{ cm} \times 20\text{ cm}$, masa: 500 kg;
b) $300\text{ cm} \times 599\text{ cm} \times 20\text{ cm}$, masa: 500 kg;
c) $300\text{ cm} \times 599\text{ cm} \times 20\text{ cm}$, masa: 600 kg;
d) $300\text{ cm} \times 600\text{ cm} \times 40\text{ cm}$, masa: 550 kg.

2. Fiecare dintre cele 8 lifturi ale unui zăne-nori are o capacitate maximă de 1000 kg, iar un lift care pleacă de la parter ajunge la etajul 30 în 2 minute și tot în 2 minute coboară de la etajul 30 la parter. În cât timp pot ajunge la etajul 30 cei 500 de oameni care lucrează acolo?

Gândiți-vă la o distribuție optimă de timp și luați în calcul o masă medie de 80 kg a unei persoane. Justificați de ce distribuția pe care ați găsit-o este optimă.

Propuneți și voi alte probleme de același fel, folosind informațiile din imaginile de mai sus, despre Sky Tower și despre Podul Basarab.

Interacționați! În echipa voastră, realizați mini-culegerea de probleme, apoi prezentați în clasă câteva probleme propuse și rezolvate din culegere.

Autoevaluare

✓ Rezolvă problemele și notează răspunsurile corecte, pentru a verifica ce știi la început de unitate de învățare.

1. Prin efectuarea înmulțirii $2,5 \cdot 1,3$ obținem

A) 3,25 B) 2,25 C) 22,5 D) 3,8

2. Rezultatul calculului $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$ este:

A) $\frac{8}{10}$ B) $\frac{7}{12}$ C) $\frac{10}{6}$ D) $\frac{3}{4}$

3. Numărul întreg a pentru care $a < \sqrt{8} - 1 < 2a$ este:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

4. Dintre numerele: $3,6$; $\frac{11}{3}$; $\sqrt{13}$; $3,2$, cel mai mare este:

A) 3,6 B) $\frac{11}{3}$ C) $\sqrt{13}$ D) $3,2$

5. Reuniunea mulțimilor $A = \{-1; 0; 1; 3\}$ și $B = \{-2; 0; 3\}$ este:

A) $\{0; 3\}$ B) $\{0\}$ C) $\{3; 1; -2; 0; -1\}$ D) $\{-2; 0; 3; -1\}$

Test de autoevaluare

În fiecare lecție, te întâmpină o provocare: o situație-problemă, care te conduce către scopul lecției. Apoi, vei întâlni definiții/enunțuri/ demonstrații, rezolvarea situației-problemă, elemente de gândire critică, precum și probleme rezolvate sau rezolvări comparative.

Lecția 1 Mulțimi de numere. Mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor lor

O situație-problemă

Codul de deblocare a telefonului are 4 cifre. Ana îl schimbă periodic după aceeași regulă: alătură două numere prime consecutive de câte două cifre. Cum putem descrie mulțimea acestor coduri? Este 3743 un cod convenabil? Dacă Ana a folosit deja 14 astfel de coduri, câte variante de schimbare mai are?

Vrem să știm! Cum determinăm o mulțime definită printr-o proprietate a elementelor ei?

Ne amintim și extindem!

1. Ce notații folosim referitor la mulțimi?

O **mulțime** este o colecție de obiecte bine determinate și distincte, ce se numesc **elementele** mulțimii. În descrierea mulțimilor, folosim următoarele notații:

Notăm	Citim	Exemplificăm
$x \in A$	Elementul x aparține mulțimii A .	$3 \in \{3; 5; 7\}$; $-5 \notin \{-6; -5; 1; 2\}$
$x \notin A$	Elementul x nu aparține mulțimii A .	$9 \notin \{-2; 3; 11\}$; $-5 \notin \{1; 2; 3\}$
$\emptyset$	Mulțimea vidă	Mulțimea florilor de pe planeta Jupiter este vidă.
$\text{card}(A)$	Cardinalul mulțimii A (sau numărul de elemente ale mulțimii A)	Mulțimea $A = \{1; 5; 7\}$ este finită, iar $\text{card}(A) = 3$.

2. Cum descriem (caracterizăm) o mulțime?

O mulțime poate fi descrisă prin:

Caracterizăm	Scrim	Citim
enumerarea elementelor	$A = \{0; 0,5; \sqrt{2}\}$	Elementele mulțimii A sunt numerele 0, 0,5 și $\sqrt{2}$.
diagrame Venn-Euler		Mulțimea A are elementele 0, 0,5, $\sqrt{2}$, iar mulțimea B are elementele $\sqrt{2}$ și 3.
scrierea unei proprietăți a elementelor sale	$A = \{x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$	Mulțimea A este formată din numerele naturale mai mici sau egale cu 3. Altfel spus: $A = \{0; 1; 2; 3\}$.

Alcătuiește o fișă pentru portofoliu în care prezinți cele trei modalități de descriere a unei mulțimi.

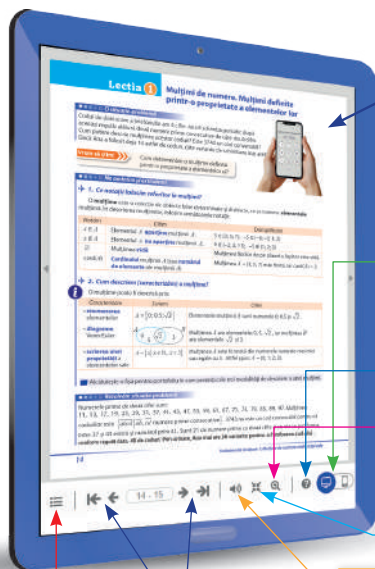
Rezolvăm situația-problemă

Numerele prime de două cifre sunt: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Mulțimea codurilor este $\{abc|ab, cd \text{ numere prime consecutive}\}$. 3743 nu este un cod convenabil pentru că între 37 și 43 există și numărul prim 41. Sunt 21 de numere prime cu două cifre și cu ele se pot forma, conform regulii date, 40 de coduri. Prin urmare, Ana mai are 26 variante pentru schimbarea codului.

Pe parcursul fiecărei unități de învățare, **evaluarea** se realizează prin:

- ✓ **Test de autoevaluare și Test inițial** – situate la începutul fiecărei unități, pentru a verifica gradul de cunoaștere a unor concepte și rezultate anterioare, necesare pentru fixarea noilor cunoștințe;
- ✓ **Teste de evaluare a nivelului de bază** – sunt prezente la fiecare lecție, pentru a asigura fixarea noțiunilor învățate;
- ✓ **Teste de (auto-) evaluare formativă** – sunt prezente în fiecare lecție, sub titlul "Alege și rezolvă în 5 minute!" și conțin trei probleme de niveluri diferite de dificultate;
- ✓ **Teste de evaluare sumativă** – verifică gradul de formare/dezvoltare a competențelor vizate în cadrul unității de învățare;
- ✓ **Proiect și portofoliu**.

Manualul digital



Butoane pentru versiunea desktop/mobil

Ajutor

Mărire/micșorare

Afișare pe tot ecranul

Sunet

Navigare între paginile manualului

Cuprinsul manualului

Activitățile multimedia din varianta electronică a manualului sunt marcate astfel:



– activitate statică



– activitate dinamică (animată)



– activitate interactivă

- Pagina de final a fiecărei unități conține o sinteză asupra a ceea ce ai învățat de-a lungul unității; cu ajutorul acesteia, poți organiza piesele din portofoliu cu maximă eficiență.
- Rezolvarea celor două teste de evaluare sumativă îți indică în ce măsură ți-ai format competențele vizate în unitate.

Probleme propuse

1. Alege răspunsul corect!
Cutia din imagine are forma unui cub. Care dintre următoarele ar putea fi capacul cutiei?
A) B) C) D)
2. Adevărat sau fals?
Cubul este o prismă patrulateră regulată.
3. a) Câte muchii are o prismă cu 6 fețe?
b) Câte fețe are o prismă cu 18 muchii?
c) Câte vârfuri are o prismă cu 9 muchii?
4. Desenează și notează o prismă hexagonală. Identifică două piramide patrulateră, determinate de vârfuri ale acestei prisme.
5. $ABCD A'B'C'D'$ este un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 6$ cm, $BC = 12$ cm și $AA' = 6\sqrt{3}$ cm. Arată că $BCD'A'$ este romb.
6. Demonstrează că diagonalele AG, BH, CE, DF ale paralelipipedului $ABCD EFGH$ sunt patru drepte concurente. Ce proprietate mai are punctul lor de intersecție?
7. Fie $ABCD EFGH$ un cub.
a) Demonstrează că A, C, F, H sunt vârfurile unui tetraedru regulat.
b) Identifică un alt tetraedru regulat, care are vârfurile în vârfurile sale, respectiv c) d) p.
8. Fie $ABCD EFGH$ un paralelipiped dreptunghic și O centrul dreptunghiului $ABCD$.
a) Determină intersecția planelor (AHP) și (DBH) .
b) Găsește poziția punctului M , în care dreapta DH intersectează planul (ACF) .
c) Demonstrează că D este mijlocul segmentului HM .
d) Determină punctele N, P , astfel încât $(N) = HG \cap (ACF)$ și $(P) = HE \cap (ACF)$.
e) Adevărat sau fals?
Triunghiurile ACF și MNP au același centru de greutate.
9. Într-o piramidă de tip $ABCD A'B'C'D'$, completează tabelul:

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Nr. fețe (f)					
Nr. muchii (m)					
Nr. vârfuri (v)					

b) Folosește datele din tabel și calculează, în fiecare caz: $f + m + v$; $f - m + v$; $f + m - v$.
Ce observi? Formulează o proprietate generală, apoi verifică afirmația pentru un alt corp geometric.
10. În cubul $ABCD EFGH$, demonstrează că mijloacele muchiilor AB, BC, CG, GH, HE, EA sunt șase puncte coplanare, care determină un hexagon regulat.
11. Demonstrează că, dacă în paralelipipedul $ALGEBRIC$ toate cele 12 diagonale ale fețelor sunt congruente între ele, atunci acest paralelipiped este un cub.

Alege și rezolvă în 5 minute!

A Suma lungimilor muchiilor unui cub este egală cu 24 dm. Calculează lungimea muchiei cubului.

B Dacă $ABCD A'B'C'$ este o prismă, stabilește poziția dreptei $A'B'$ față de planul ABC' și justifică răspunsul tău.

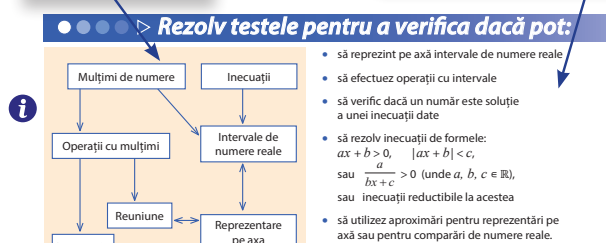
C O prismă are fețele laterale reprezentate de șase pătrate cu latura de 5 cm. Calculează suma lungimilor tuturor muchiilor prisme.

Unitatea de învățare 5: Puncte, drepte, plane, corpuri geometrice. Poziții relative

124

Sinteză/ hartă conceptuală

Competențele vizate



Teste de evaluare

Utilizează schema de mai sus și adaugă în portofoliu elementele esențiale din lecțiile unității 1, referitoare la conceptele menționate.

Testul 1

1. Desenează o axă a numerelor, apoi reprezintă pe aceasta intervalele $(-1; 2)$ și $[3; +\infty)$.
2. Folosește reprezentarea pe axă și determină $(-1; 2) \cap (1; 3)$.
3. Alege răspunsul corect!
Numărul -2 este soluție a inecuației:
A) $x + 3 \leq 0$;
B) $|3x - 1| < 3$;
C) $x + 3 \geq 2x$;
D) $\frac{1}{x+5} < 0$.
4. Rezolvă inecuația: $\frac{x+1}{2} \geq \frac{x}{3} - 1$.
5. Pe axa numerelor din imagine sunt marcate prin culoare intervalele $(-\infty; -1]$ și $(1; +\infty)$.
Pe axă nu este marcată originea și nici unitatea de măsură. Copiază desenul pe caiet, apoi reprezintă pe axă intervalul $(-2; 0)$.

Testul 2

1. Desenează o axă a numerelor, apoi reprezintă pe aceasta intervalele $[0; 1]$ și $(-\infty; -1)$.
2. Folosește reprezentarea pe axă și determină $[1; 3) \cap (-1; 2]$.
3. Scrie pe caietul tău coduri de tipul **0A**, prin care asociezi inecuațiile din prima linie cu soluțiile lor din a doua linie:
 $2x - 2 \geq x$; $\frac{1}{2x + \sqrt{2}} < 0$; $|x + 1| \leq 2$.
 A. -4 B. 0 C. 2 D. 1,5
4. Rezolvă inecuația: $x - \frac{1}{2} < \frac{x+1}{3}$.
5. Pe axa numerelor din imagine sunt marcate prin culoare intervalele $(-\infty; -2]$ și $(0; +\infty)$.
Pe axă nu este marcată originea și nici unitatea de măsură. Copiază desenul pe caiet, apoi reprezintă pe axă intervalul $(-1; 1)$.

Unitatea de învățare 1: Multipli de numere reale. Intervale

33

La fiecare lecție, sunt propuse exerciții și probleme ce se pot rezolva în clasă sau acasă. Acestea sunt grupate pe patru niveluri de dificultate.

Mult succes!

Recapitulare prin probleme

Mulțimi. Operații cu mulțimi

- Pentru fiecare din următoarele cazuri, efectuează:
 $A \cup B$; $A \cap C$; $(B \cup C) \cap A$; $B \setminus (A \cup C)$.
a) $A = \{1; 3\}$; $B = \{-1; 2; 3\}$; $C = \{-2; 2\}$; **b)** $A = \{0; 1; 2\}$, $B = \{2\}$; $C = \{-2; 2\}$
- Adevărat sau fals? **a)** $3 \in \mathbb{Z}$; **b)** $2,5 \in \mathbb{Q}$; **c)** $\sqrt{4} \notin \mathbb{N}$; **d)** $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$; **e)** $-\frac{3}{4} \notin \mathbb{Q}$
- Fie mulțimea $A = \left\{-9; 0,5; \sqrt{2}; \frac{4}{5}; 4; \frac{11}{3}; -3; \sqrt{121}; 1,(2); -\frac{4}{3}; \frac{20}{4}\right\}$.
 Determină mulțimile: **a)** $A \cap \mathbb{N}$; **b)** $A \cap \mathbb{Z}$; **c)** $A \cap \mathbb{Q}$; **d)** $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

Numere naturale; numere întregi. Operații. Divizibilitate

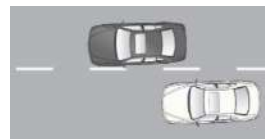
- Calculează: **a)** $-2 - (-5)$; **b)** $(-2) \cdot (-5)$; **c)** $3 - (-2 + 3)$; **d)** $(-3)^2$; **e)** $(-5) \cdot 2 + (-3) \cdot (-4)$.
- Alege răspunsul corect! Descompunerea ca produs de factori primi a numărului 108 este: **A)** $4 \cdot 27$ **B)** $2^2 \cdot 3^3$ **C)** $2^3 \cdot 3^2$ **D)** $2 \cdot 54$
- Calculează: **a)** cel mai mare divizor comun al numerelor 144 și 180;
b) cel mai mic multiplu comun al numerelor 36 și 48.
- Determină cifrele a și b , dacă: **a)** $\overline{ab4} : 9$ și $a > b$; **b)** $\overline{2ab} : 15$ și $a < b$.
- Determină toate numerele întregi n , diferite de 1, pentru care $\frac{2n+1}{n-1}$ este număr întreg.

Numere raționale. Forme de scriere. Operații

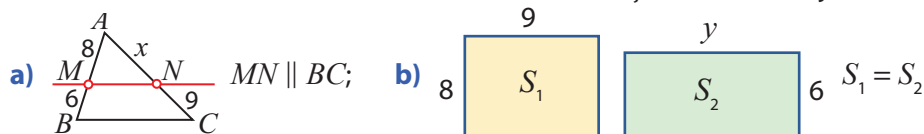
- Scrie ca fracție ireductibilă: **a)** $\frac{135}{90}$; **b)** $\frac{208}{176}$; **c)** $-\frac{200}{360}$; **d)** $\frac{190}{380}$; **e)** $-\frac{268}{-804}$.
- Calculează:
a) $4 + 4 \cdot 2$; **b)** $28 - 24 : 4$; **c)** $2,5 : 2 + 32$; **d)** $\frac{5}{24} + \left(-\frac{2}{24}\right) + \left(-\frac{5}{18}\right)$;
e) $\left(-\frac{2}{3} - \frac{4}{3} \cdot 0,25\right) : \left(\frac{5}{8} - \frac{7}{32} : \frac{7}{6}\right)$; **f)** $\left\{\left[\left(-\frac{5}{4}\right)^3\right]^{11} : \left(-\frac{16}{25}\right)^{-15}\right\} : \frac{125}{64}$.
- Calculează: **a)** $2,35 + 1,4$; **b)** $5,2 - 4,38$; **c)** $2,4 \cdot 1,25$; **d)** $4,5 : 2,5$; **e)** $(-1,2)^3$.

Rapoarte și proportii. Proportionalitate directă și inversă

- Două autoturisme pornesc în același timp din localitatea A și circulă către localitatea B cu vitezele 60 km/h, respectiv 70 km/h. Unul dintre autoturisme ajunge cu 15 minute înaintea celuilalt în localitatea B . Determină distanța dintre localitățile A și B .



- Calculează numerele necunoscute: **a)** $\frac{6}{15} = \frac{x}{25}$; **b)** $\frac{x}{21} = \frac{-10}{35}$; **c)** $\frac{x}{4} = \frac{9}{x}$.
- Determină mărimile necunoscute, folosind informațiile notate mai jos.



Procente. Probabilități. Medii

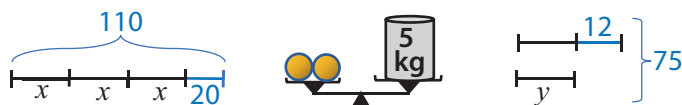
- După două creșteri consecutive, prima de 12% și a doua de 10%, prețul unui obiect a devenit 125,40 lei. Determină prețul inițial.
- Determină două numere care au media aritmetică ponderată, cu ponderile 4 și 6, egală cu 42 și sunt direct proporționale cu 3 și 5.
- Calculează probabilitatea ca, alegând un număr natural de o cifră, acesta să fie pătrat perfect.

Numere reale. Modul

18. Calculează: **a)** $\sqrt{3^2 \cdot 4^2}$; **b)** $\sqrt{3^2 + 4^2}$; **c)** $\sqrt{12^2 \cdot 5^2}$; **d)** $\sqrt{12^2 + 5^2}$; **e)** $\sqrt{15^2 - 12^2}$.
19. Compară: **a)** $2\sqrt{3}$ cu $3\sqrt{2}$; **b)** $2\sqrt{5}$ cu 5; **c)** 6 cu $2\sqrt{7}$; **d)** $5\sqrt{2}$ cu $3\sqrt{5}$.
20. Alege răspunsul corect! Dacă $a = (\sqrt{3})^7 : (-\sqrt{3})^4 + 3(-\sqrt{3})^3 \cdot (-\sqrt{3})^{-2}$, atunci:
A) $a = 0$ **B)** $a = 3$ **C)** $a = -3$ **D)** $a = 3\sqrt{3}$
21. Calculează: **a)** $|-2|$; **b)** $|-2 - \sqrt{2}|$; **c)** $|-2 + \sqrt{6}|$; **d)** $|\sqrt{13} - 2\sqrt{3}|$; **e)** $|2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}|$.

Ecuatii. Inecuatii. Sisteme

22. Scrie ecuația potrivită fiecărui desen, apoi determină numerele necunoscute.



23. Determină $n \in \mathbb{N}$ pentru care:

a) $\frac{5}{12} < \frac{n}{6} < \frac{11}{12}$; **b)** $\frac{1}{4} < \frac{n+1}{12} < \frac{4}{6}$; **c)** $\frac{4}{6} < \frac{12}{n} < \frac{9}{5}$; **d)** $\frac{30}{17} < \frac{10}{n-1} < \frac{5}{2}$.

24. Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuațiile: **a)** $x^2 = 36$; **b)** $x^2 = 361$; **c)** $x^2 - 4 = 0$; **d)** $x^2 - 144 = 0$; **e)** $x^2 = 5$; **f)** $x^2 = 48$; **g)** $x^2 - 12 = 0$; **h)** $2x^2 = 72$; **i)** $3x^2 = 75$; **j)** $6x^2 - 24 = 0$.

25. Rezolvă în $\mathbb{Q}$ ecuațiile: **a)** $2x - 5 = 2$; **b)** $-5 + 3x = 4(x - 1) + 2$;
c) $6(x + 1) - 2 = 3x + 1$; **d)** $1 - 2(x - 3) = x + 3(2 - x)$; **e)** $-\sqrt{3}x = \sqrt{27}$;
f) $\sqrt{5}x = \sqrt{35}$; **g)** $\sqrt{2}x = -5\sqrt{6}$; **h)** $\sqrt{8}x = 5\sqrt{32}$.

26. Rezolvă următoarele sisteme:

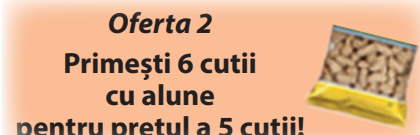
a) $\begin{cases} -2x + y = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} -2x - y = 1 \\ x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ 3x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 4(2 - y) = 3(x - 2) \\ 2(x - 1) = 3(1 - y) \end{cases}$.

Organizarea datelor. Optimizare

27. Un magazin propune două oferte:



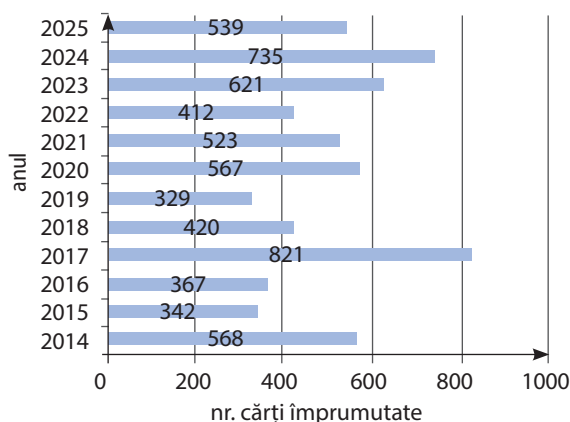
Oferta 1
La fiecare două cutii
cu alune,
ai o reducere de 15%!



Oferta 2
Primești 6 cutii
cu alune
pentru prețul a 5 cutii!

Care ofertă este mai avantajoasă dacă vrei să cumperi 12 cutii cu alune?

28. Într-un sistem de coordonate în care unitatea de măsură aleasă este de 1 cm, considerăm punctul $M(3;1)$. Din punctul M ne deplasăm paralel cu axa absciselor 2 cm și paralel cu axa ordonatelor 1 cm. Care sunt coordonatele punctului astfel obținut? Analizează toate cazurile posibile.

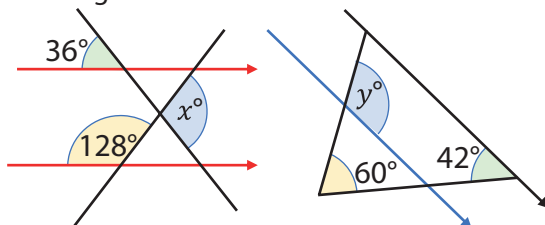


29. În diagrama alăturată sunt reprezentate împrumuturile înregistrate în perioada 2014-2025 într-o bibliotecă.

- a)** În ce an s-a înregistrat numărul minim de împrumuturi? Dar numărul maxim?
b) Care este numărul mediu de cărți împrumutate anual? Aproximează rezultatul obținut la cel mai apropiat întreg.
c) Care este procentul de împrumuturi din 2025, raportat la totalul împrumuturilor din întreaga perioadă?

Drepte, segmente, unghiuri

30. Alege răspunsul corect! Dacă punctele A, B, C sunt coliniare, cu $AB = 11$ cm, $BC = 9$ cm și $AC < AB$, atunci:
A) $AC = 20$ cm **B)** $AC = 3$ cm **C)** $AC = 21$ cm **D)** $AC = 2$ cm
31. Măsura unui unghi exterior al unui triunghi isoscel este de 60° . Calculează măsurile unghiurilor interioare ale triunghiului.
32. În fiecare dintre figurile alăturate, dreptele marcate cu săgeți sunt paralele. Calculează măsurile unghiurilor necunoscute.



Poligoane

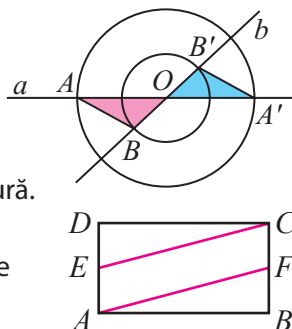
33. Construiește un patrulater convex $ABCD$, cu $\sphericalangle A = 60^\circ$, $\sphericalangle B = 90^\circ$ și $\sphericalangle C = 110^\circ$. Care este măsura celui de-al patrulea unghi al patrulaterului?
34. În trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, semidreptele AC și BD sunt bisectoarele unghiurilor BAD , respectiv ABC . Demonstrează că trapezul este isoscel.
35. Stabilește natura patrulaterului determinat de mijloacele laturilor:
a) unui dreptunghi; **b)** unui romb.
36. Alege răspunsul corect! Într-un romb cu aria de 48 cm^2 și una dintre diagonale de 8 cm, lungimea celeilalte diagonale este egală cu:
A) 6 cm **B)** 24 cm **C)** 12 cm **D)** 18 cm

Arie și perimetru

37. Alege răspunsul corect! Dacă un triunghi isoscel are baza de 16 cm și o altă latură de 10 cm, atunci aria sa este egală cu:
A) 48 cm^2 **B)** 24 cm^2 **C)** 12 cm^2 **D)** 36 cm^2
38. Calculează aria unui dreptunghi cu perimetrul 68 m și cu o diagonală 26 m.
39. Calculează aria unui romb cu latura de 6 cm și un unghi de 30° .
40. În paralelogramul $ABCD$ cu aria de 20 cm^2 , se notează cu O punctul de intersecție a diagonalelor. Calculează aria triunghiului AOB .
41. Un trapez dreptunghic are un unghi cu măsura 45° și bazele de 20 cm și 12 cm. Calculează perimetrul trapezului.
42. În sistemul ortogonal xOy se consideră punctele $A(1;1)$, $B(-1;-1)$, $C(1;-1)$. Calculează perimetrul și aria triunghiului ABC .

Congruență

43. Dreptele a și b sunt concurente în punctul O . Două cercuri concentrice, de centru O , intersectează aceste drepte în punctele A și A' , respectiv în B și B' .
a) Demonstrează ca triunghiurile AOB și $A'OB'$ sunt congruente.
b) Identifică alte două triunghiuri congruente pe figură.
c) Arată că dreptele AB și $A'B'$ sunt paralele.
44. În dreptunghiul $ABCD$, punctele E și F sunt mijloacele laturilor AD , respectiv BC . Arată că $AF \equiv CE$.

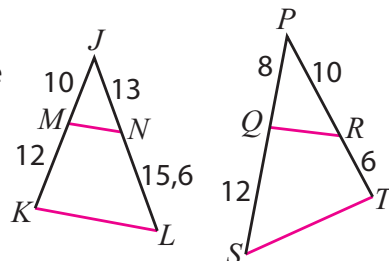


Proportionalitate. Asemănare

45. Fie $ABCD$ paralelogram și o secantă oarecare dusă prin vârful B , care intersectează dreptele CD și AD în punctele M , respectiv N . Demonstrează că produsul $MC \cdot AN$ este constant.
46. În paralelogramul $ABCD$ se consideră punctele E și F pe segmentele AB , respectiv AC , astfel încât $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$. Arată că punctele D, E și F sunt coliniare.

47. Identifică triunghiuri asemenea în figurile de alături. Justifică răspunsul.

48. În trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $AC \cap BD = \{O\}$, MN este paralela prin O la AB , $M \in AD$, $N \in BC$, P – mijlocul segmentului AB și Q – mijlocul segmentului CD . Arată că:
- a) O este mijlocul segmentului MN ; b) O, P și Q sunt coliniare.

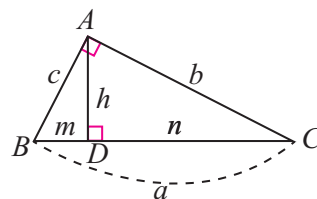


Relații metrice

49. Folosind convențiile și datele din figurile de alături, calculează lungimile notate cu x .
50. În triunghiul ABC dreptunghic în A , se notează cu D piciorul înălțimii din A , cu E piciorul bisectoarei din C , cu G punctul de intersecție dintre înălțimea și bisectoarea anterior construite și cu F piciorul perpendicularei din E pe BC . Demonstrează că:
- a) triunghiul AEF este isoscel; b) $AEFG$ este romb.
51. În dreptunghiul $ABCD$, $AD = 10$ cm și proiecția lui AD pe diagonală AC are lungimea de 6 cm. Determină lungimea segmentului AB .
52. Completează tabelul, unde notațiile au semnificațiile marcate pe figură.

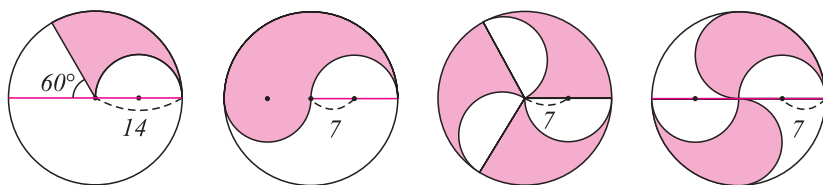
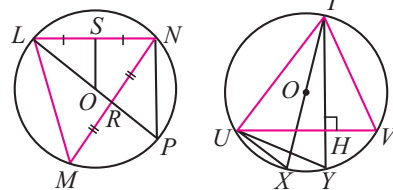


Ex.	a	b	c	m	n	h	$\sphericalangle B$	$\sphericalangle C$
1.		3					45°	
2.			8	4				
3.		$\sqrt{3}$				$\frac{\sqrt{3}}{2}$		



Cerc

53. Identifică toate perechile de triunghiuri asemenea în figurile alăturate. Justifică relațiile obținute folosind convențiile de desen și teoremele învățate.
54. O coardă de 8 cm este la distanța de 3 cm de centrul cercului. Calculează lungimea razei cercului.
55. Aria unui pătrat este 100 m^2 . Calculează raza cercului circumscris și perimetrul pătratului.
56. Determină ariile suprafețelor colorate folosind datele din figurile de mai jos.





Proiect: Construcții



Sky Tower București – înălțime 137 metri, 37 etaje, construit în anul 2012



Podul Basarab, București – trafic: 50.000 de vehicule zilnic, finalizat în anul 2011

Plan de lucru

- ➔ **Scop:** Veți realiza o mini-culegere de probleme referitoare la arhitectură și construcții.
- ➔ **Materiale necesare:** coli de hârtie, creioane, calculator

Realizarea proiectului

Lucrați în echipe de trei, patru sau cinci colegi.

- ➔ Pentru problemele marcate cu simbolul de proiect în cadrul unității, propuneți și rezolvați o problemă asemănătoare, pe care puteți să o includeți în mini-culegere.
- ➔ Căutați pe Internet date despre construcții recente din țara noastră. Comparați dimensiuni sau recorduri.
- ➔ Identificați în diverse surse (manual, culegeri), sau propuneți voi probleme despre diverse construcții. Rezolvați problemele.

Pentru început:

- ➔ Rezolvați problemele care urmează.

1. O macara a fost proiectată să transporte panouri de beton armat de formă paralelipipedică având dimensiunile maxime de $4\text{ m} \times 3\text{ m} \times 20\text{ cm}$ și masa maximă de o tonă. Care dintre panourile cu parametrii menționați mai jos pot fi transportate?
 a) $300\text{ cm} \times 300\text{ cm} \times 20\text{ cm}$, masa: 500 kg;
 b) $300\text{ cm} \times 500\text{ cm} \times 20\text{ cm}$, masa: 500 kg;
 c) $300\text{ cm} \times 300\text{ cm} \times 20\text{ cm}$, masa: 600 kg;
 d) $300\text{ cm} \times 300\text{ cm} \times 40\text{ cm}$, masa: 550 kg.

2. Fiecare dintre cele 8 lifturi ale unui zgârie-nori are o capacitate maximă de 1000 kg, iar un lift care pleacă de la parter ajunge la etajul 30 în 2 minute și tot în 2 minute coboară de la etajul 30 la parter.
 În cât timp pot ajunge la etajul 30 cei 500 de oameni care lucrează acolo?
 Gândiți-vă la o distribuție optimă de timp și luați în calcul o masă medie de 80 kg a unei persoane. Justificați de ce distribuția pe care ați găsit-o este optimă.

Propuneți și voi alte probleme de același fel, folosind informațiile din imaginile de mai sus, despre Sky Tower și despre Podul Basarab.



Interacționați în echipa voastră, realizați mini-culegerea de probleme, apoi **prezentați** în clasă câteva probleme propuse și rezolvate din culegere.

Autoevaluare

- ✓ Rezolvă problemele și alege răspunsurile corecte, pentru a verifica ce știi la început de *unitate de învățare*.

1. Prin efectuarea înmulțirii $2,5 \cdot 1,3$ obținem
 A) 3,25 B) 2,25 C) 32,5 D) 3,8
2. Rezultatul calculului $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$ este:
 A) $\frac{8}{10}$ B) $1\frac{7}{12}$ C) $\frac{10}{6}$ D) $1\frac{3}{4}$
3. Numărul întreg a pentru care $a < \sqrt{8} - 1 < 2a$ este:
 A) 0 B) 1 C) 2 D) 3
4. Dintre numerele: $3,6$; $\frac{11}{3}$; $\sqrt{13}$; $3\frac{1}{2}$, cel mai mare este:
 A) 3,6 B) $\frac{11}{3}$ C) $\sqrt{13}$ D) $3\frac{1}{2}$
5. Reuniunea mulțimilor $A = \{-1; 0; 1; 3\}$ și $B = \{-2; 0; 3\}$ este:
 A) $\{0; 3\}$ B) $\{0\}$ C) $\{3; 1; -2; 0; -1\}$
 D) $\{-2; 0; 3; -1\}$

Ce știi deja? Verific!

Test inițial de (auto)evaluare

Timp de lucru: 45 minute

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni și rezultate necesare pentru parcurgerea acestei Unități de învățare. Fiecare problemă propusă valorează 1 punct. Se acordă 1 punct din oficiu.

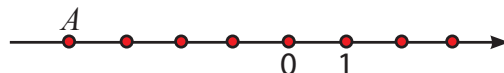
I. Scrie pe foaia de rezolvare cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

Numere reale

1. Numărul real $\sqrt{24}$ mai poate fi scris $2\sqrt{b}$. Atunci $b = \dots$

Axa numerelor

2. Pe axa din imagine, abscisa punctului A este



II. Scrie pe foaia de rezolvare litera corespunzătoare răspunsului corect pentru următoarele exerciții:

Relația de apartenență

3. Dacă M este mulțimea numerelor naturale de trei cifre, divizibile cu 9, care dintre următoarele numere aparține mulțimii M ?

- A) 449 B) 2106 C) 54 D) 351

Compararea și ordonarea numerelor reale

4. Câte numere din lista: 2 , (1) ; $\frac{13}{9}$; $\sqrt{3}$; $2 - \sqrt{2}$; -2 ; $4 - \sqrt{5}$ sunt mai mari decât $1,5$?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 6

Relația de incluziune

5. Geo a scris mulțimea G a tuturor divizorilor naturali ai numărului 24. Ana a scris și ea mulțimea A a tuturor divizorilor naturali ai numărului natural x . Ce număr x putea alege Ana, dacă știm că $A \subset G$?

- A) 10 B) 12 C) 15 D) 20

III. Scrie pe foaia de rezolvare soluțiile complete ale exercițiilor următoare:

Mulțimi egale

6. Determină numerele a și b astfel ca mulțimile $\{a; a + 1; 5\}$ și $\{b; b + 1; 3\}$ să fie egale.

Reuniunea mulțimilor

7. Dacă $A = \{1; 3; 5; 7\}$ și $B = \{1; 2; 3; 4\}$, calculează $A \cup B$.

Intersecția mulțimilor

8. Tic a explicitat mulțimea divizorilor naturali ai numărului 8 și mulțimea divizorilor naturali ai numărului 12. Mati a observat că intersecția acestor mulțimi poate fi descrisă ca mulțimea divizorilor naturali ai numărului n . Ce valoare are n ?

Proprietăți ale numerelor reale

9. Despre numerele reale și nenule a și b știm că $a < b$. Observă următoarele afirmații. Care dintre acestea sunt întotdeauna adevărate? Pentru fiecare afirmație ce poate fi falsă, propune câte un contraexemplu!

a) $2a + 1 < 2b + 1$; b) $a^2 < b^2$; c) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; d) $2 - 3a > 2 - 3b$; e) $a + b < ab$.

Dacă ai obținut mai puțin de jumătate din punctaj la acest test, este util să revezi definițiile și proprietățile verificate mai sus, pentru a înțelege mai bine ceea ce urmează.

O situație-problemă

Codul de deblocare a telefonului are 4 cifre. Ana îl schimbă periodic după aceeași regulă: alătură două numere prime consecutive de câte două cifre. Cum putem descrie mulțimea acestor coduri? Este 3743 un cod convenabil? Dacă Ana a folosit deja 14 astfel de coduri, câte variante de schimbare mai are?

Vrem să știm!

Cum determinăm o mulțime definită printr-o proprietate a elementelor ei?



Ne amintim și extindem!

1. Ce notații folosim referitor la mulțimi?

O **mulțime** este o colecție de obiecte bine determinate și distincte, ce se numesc **elementele** mulțimii. În descrierea mulțimilor, folosim următoarele notații:

Notăm	Citim	Exemplificăm
$x \in A$	Elementul x aparține mulțimii A .	$3 \in \{3; 5; 7\}$; $-5 \in \{-6; -5; 1; 2\}$
$x \notin A$	Elementul x nu aparține mulțimii A .	$9 \notin \{-2; 3; 11\}$; $-5 \notin \{1; 2; 3\}$
$\emptyset$	Mulțimea vidă	Mulțimea florilor de pe planeta Jupiter este vidă.
$\text{card}(A)$	Cardinalul mulțimii A (sau numărul de elemente ale mulțimii A)	Mulțimea $A = \{1; 5; 7\}$ este finită, iar $\text{card}(A) = 3$.

2. Cum descriem (caracterizăm) o mulțime?



O mulțime poate fi descrisă prin:

Caracterizăm	Scriem	Citim
• enumerarea elementelor	$A = \{0; 0,5; \sqrt{2}\}$	Elementele mulțimii A sunt numerele 0; 0,5 și $\sqrt{2}$.
• diagrame Venn-Euler		Mulțimea A are elementele: 0, 5, $\sqrt{2}$, iar mulțimea B are elementele $\sqrt{2}$ și 3.
• scrierea unei proprietăți a elementelor sale	$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$	Mulțimea A este formată din numerele naturale mai mici sau egale cu 3. Altfel spus: $A = \{0; 1; 2; 3\}$.

Alcătuiește o fișă pentru portofoliu în care prezinți cele trei modalități de descriere a unei mulțimi.

Rezolvăm situația-problemă

Numerele prime de două cifre sunt:

11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Mulțimea

codurilor este $\{\overline{abcd} \mid \overline{ab}, \overline{cd} \text{ numere prime consecutive}\}$. 3743 nu este un cod convenabil pentru că

între 37 și 43 există și numărul prim 41. Sunt 21 de numere prime cu două cifre și cu ele se pot forma, conform regulii date, 40 de coduri. Prin urmare, Ana mai are 26 variante pentru schimbarea codului.

➔ 3. Care sunt mulțimile numerice pe care le folosim?

Mulțimile de numere studiate sunt:

- **Mulțimea numerelor naturale**

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$$

- **Mulțimea numerelor întregi**

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$

- **Mulțimea numerelor raționale**

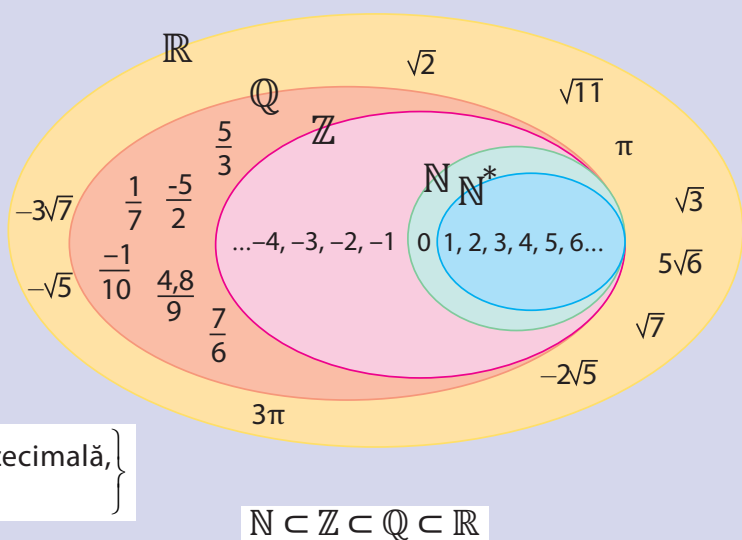
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

- **Mulțimea numerelor iraționale**

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \left\{ x \mid x \text{ se scrie ca fracție zecimală,} \right. \\ \left. \text{infinită, neperiodică} \right\}$$

- **Mulțimea numerelor reale**

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ este număr rațional sau irațional}\}$$



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

➔ 4. Cum se scriu numerele reale?

• **Numerele raționale** se pot scrie în două forme echivalente: reprezentare fracționară și reprezentare zecimală. Putem transforma numerele raționale dintr-o formă de scriere în cealaltă folosind regulile ilustrate în tabel.

Reprezentare fracționară	Reprezentare zecimală	Exemple
• prin fracție al cărei numitor este de forma $2^n \cdot 5^p$, ($n, p \in \mathbb{N}$)	• cu număr finit de cifre nenule	$\frac{4}{5} = 0,8$; $0,175 = \frac{175}{1000}$
• prin fracție ireductibilă al cărei numitor conține numai factori primi diferiți de 2 și de 5	• periodică simplă	$\frac{4}{11} = 0,(36)$; $4,(175) = 4\frac{175}{999}$
• prin fracție ireductibilă al cărei numitor conține factorii 2 sau 5, precum și alți factori primi, diferiți de aceștia	• periodică mixtă	$\frac{4}{15} = 0,2(6)$; $2,17(5) = 2\frac{175-17}{900}$

• **Numerele iraționale** au după virgulă o *infinitate* de zecimale care nu se repetă periodic.

Exemple: $\sqrt{2} = 1,414213562 \dots$; $0,0100100010000 \dots$; $\pi = 3,1415926535 \dots$

●●●●▷ Evaluăm nivelul de bază

Determină mulțimile:

$B = \{x \in A \mid x \text{ se scrie ca fracție zecimală, cu număr finit de zecimale nenule}\}$,

$C = \{x \in A \mid x \text{ se scrie ca fracție zecimală periodică}\}$, unde $A = \left\{ \frac{7}{5}; \frac{1}{7}; \frac{5}{6}; \frac{3}{20}; \frac{25}{15}; \frac{3}{6}; \frac{13}{12} \right\}$.

- ★
1. Scrie sub forma unei mulțimi:
 - a) toate numerele naturale mai mici sau egale cu 10;
 - b) toate numerele naturale care îl divid pe 20;
 - c) toți multiplii naturali ai lui 3, mai mici decât 13;
 - d) toate numerele reale care au pătratul egal cu 25.
 2. Adevărat sau fals?
 $\{1, 3, 9, 27, 81\} = \{x \mid x = 3^n, n \in \mathbb{N}, n \leq 4\}$.
 3. Fie $A = \{\sqrt{7}; 2,3(8); -3,2; -6; \sqrt{5}\}$.
Explicitează mulțimile:
 - a) $B = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Z}\}$; c) $D = \{x \in A \mid x \in \mathbb{N}\}$;
 - b) $C = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Q}\}$; d) $E = \{x \in A \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$.
 4. Scrie în trei moduri mulțimea numerelor naturale pare cuprinse între 9 și 21.
 5. Adevărat sau fals?
 - a) $\frac{0}{1} \in \mathbb{N}$; c) $\sqrt{14} \in \mathbb{Q}$; e) $-\frac{21}{7} \in \mathbb{Z}$;
 - b) $4,6 \in \mathbb{Q}$; d) $5,(3) \in \mathbb{R}$; f) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.
 6. Determină afirmațiile adevărate:
 - a) $2 \in \{1, 2, 3\}$; b) $3 \notin \{0, 2, 5\}$; c) $0 \notin \emptyset$;
 - d) $\{4\} \supset 4$; e) $7 \notin \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x < 7\}$.
 7. a) Scrie în formă zecimală: $\frac{2}{5}; \frac{11}{3}; \frac{2}{15}; \frac{32}{4}; \frac{1}{7}$.
b) Scrie în formă fracționară: $2,15; 3,(15); 0,1(6); 11,3; 4,2(7)$.
 8. Determină elementele unei mulțimi, știind că acestea sunt numere naturale consecutive și au suma egală cu 15.
 9. Scrie din ce mulțimi numerice ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sau $\mathbb{R}$), face parte fiecare număr:
 $-3; 2,79; \sqrt{11}; \pi; 5\pi; -3,2(7)$.
 10. Scrie fracțiile în formă ireductibilă și decide dacă numărul reprezentat este periodic simplu, periodic mixt, sau are un număr finit de zecimale nenule:
 $\frac{3}{8}; \frac{12}{49}; \frac{249}{37}; \frac{3256}{400}; \frac{321}{90}$.
 11. Fie $A = \{123, 59, 78, 19, 101, 27\}$.
Determină mulțimea formată din resturile împărțirii elementelor lui A la 10.
 12. Împărțind numărul 109 la 300, Raluca a obținut câtul 0,363 și cum cifra 3 se repetă, a tras concluzia că $\frac{109}{300} = 0,(36)$. Este corect?
 13. Scrie mulțimea $M = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$, folosind o proprietate a elementelor sale.
 14. Explicitează mulțimile:
 $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{6}{x-2} \in \mathbb{N}\right\}, B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{6}{x-2} \in \mathbb{Z}\right\}$.
 15. **Investigație**
 - a) Demonstrează că un număr par nu are un multiplu scris doar cu cifre de 9.
 - b) Transformă numărul $\frac{2}{37}$ în formă zecimală.
Folosește apoi rezultatul obținut pentru a arăta că 37 are un multiplu scris doar cu cifre de 9.
 - c) Determină numărul natural n , cu proprietatea că $\frac{1}{n}$ se exprimă printr-o fracție periodică simplă cu exact trei cifre în perioadă.
 16. Fie M mulțimea numerelor naturale pare de două cifre.
 - a) Determină cardinalul mulțimii M .
 - b) Propune două numere naturale a și b , astfel ca $\{n \mid n \text{ număr natural par}, a < n < b\}$ să aibă un număr dublu de elemente față de M .
 17. Fie a un număr real subunitar ce se scrie în formă zecimală $0,a_1a_2a_3\dots$. Știm că suma oricăror trei zecimale alăturate ale lui a este aceeași. Demonstrează că $a \in \mathbb{Q}$.

●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

Determină elementele mulțimii

A

$$A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{15}{x} \in \mathbb{Z}\right\}.$$

B

$$B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{16}{x-4} \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\right\}.$$

C

$$C = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3x+16}{-x+4} \in \mathbb{N}\right\}.$$

O situație-problemă

Bornele kilometrice marchează distanțele pe șoselele României. Familia lui Dan și cea a Anei au hotărât să meargă împreună într-o excursie cu mașinile. Cele două familii au pornit din Sibiu spre Pitești, pe Transfăgărășan, în același timp. După două ore, mașina condusă de tatăl Anei a ajuns la borna din imagine, iar cea condusă de mama lui Dan, la borna pe care scrie Pitești 132. Cine a avut o viteză mai mare?



Rezolvare: Deoarece suntem pe sensul de mers de la kilometrul 0, iar 129 km și 132 km reprezintă distanțe parcurse, deducem că tatăl Anei a avut o viteză mai mare. Marcajul șoselelor folosind bornele kilometrice este similar cu marcarea numerelor pe axa numerică.

Vrem să știm! Cum determinăm poziția unui număr pe axa numerelor?

1. Cum reprezentăm numerele pe axa numerică?

Să ne amintim

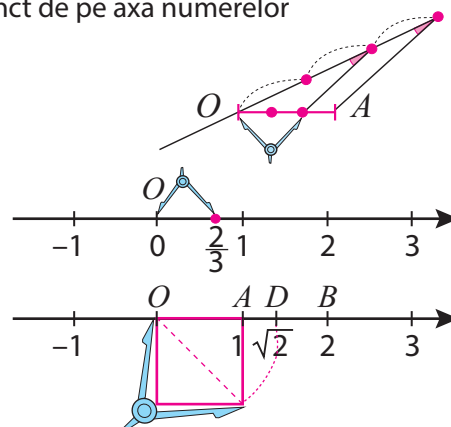
Numerele reale se reprezintă pe axă cu ajutorul unor segmente cu o extremitate în origine. Un număr real determină un punct unic pe axa numerelor. Orice punct de pe axa numerelor corespunde unui număr real, care se numește **abscisa** acelui punct.

Reprezentarea pe axa numerelor se poate face:

- prin construcții geometrice:

Exemple: • Reprezentăm $\frac{2}{3}$ prin împărțirea segmentului-unitate pe baza teoremei fundamentale a asemănării:

- Reprezentăm $\sqrt{2}$ trasând cu ajutorul compasului diagonală pătratului cu latura segmentul-unitate:



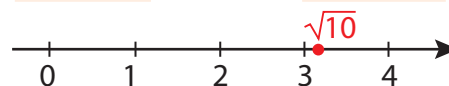
- folosind aproximări:

Exemplu:

- Reprezentăm $\sqrt{10}$ prin **încadrarea între două valori consecutive de același ordin**. Putem obține o valoare aproximativă pentru $\sqrt{10}$ folosind un calculator de buzunar. De exemplu, calculatorul din imagine ne indică, prin **trunchiere**, primele șapte zecimale exacte.



aproximare prin lipsă		aproximare prin adaos
3	$< \sqrt{10} <$	4
3,1	$< \sqrt{10} <$	3,2
3,16	$< \sqrt{10} <$	3,17
3,162	$< \sqrt{10} <$	3,163
3,1622	$< \sqrt{10} <$	3,1623

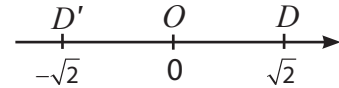


Exprimare orală

Explică, folosind propriile tale cuvinte, modul în care s-au realizat reprezentările de mai sus.

➔ 2. Ce elemente caracterizează poziția unui număr pe axă?

Pe axa numerelor alăturată sunt reprezentate numerele $-\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$.



Definim:

Numerele care diferă doar prin semn se reprezintă prin puncte egal depărtate de origine și se numesc **opuse**.

Modulul (sau **valoarea absolută**) a unui număr real reprezintă **distanța** de la origine la punctul de pe axa numerelor corespunzător aceluși număr.

Fiind **lungimea unui segment**, modulul unui număr nu poate fi decât pozitiv sau 0.

Exemple:

-1 și $+1$ sunt numere opuse. La fel $-\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$

Notăm	Citim
$ a $	modulul lui a

Exemple: $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$; $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$



Din definiția modulului, se deduc următoarele proprietăți:

$$|a| \geq 0, \text{ oricare ar fi } a \in \mathbb{R}$$

$$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$|a| = \begin{cases} -a, & \text{dacă } a < 0 \\ a, & \text{dacă } a \geq 0 \end{cases}$$

●●●● ➤ Evaluăm nivelul de bază

Reprezintă pe axă: $\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{2}$; $4,3$; $-\sqrt{13}$ și precizează numărul cu modulul cel mai mare.

●●●● ➤ Problemă rezolvată

Ordonează crescător numerele: $\sqrt{2}$; $1,5$; $1,(42)$; $-1,7$; $-\sqrt{3}$. Folosește un minicalculator.

Rezolvare:

Aproximarea prin adaos la ordinul sutimilor a lui $\sqrt{2}$ este $1,42$ care este mai mic decât $1,424242\dots$, iar $1,(42)$ este mai mic decât $1,5$. Aproximarea prin lipsă la zecimi a lui $\sqrt{3}$ este $1,7$, deci $\sqrt{3} > 1,7$.

Cum dintre două numere negative este mai mare cel cu modulul mai mic, deducem $-\sqrt{3} < -1,7$.

În concluzie: $-\sqrt{3} < -1,7 < \sqrt{2} < 1,(42) < 1,5$.

●●●● ➤ Probleme propuse



1. Completează tabelul:

Număr	3	7	-8	-1	12	2,5
Opus	-3					
Invers	$\frac{1}{3}$					
Modul	3					

2. Reprezintă pe axă numerele:

$$\frac{1}{2}; -\frac{5}{6}; \frac{4}{3}; 1,8; \frac{3}{4}; -\frac{9}{5}.$$

3. a) Reprezintă pe axă, folosind rigla și compasul, numerele: -2 ; 0 ; 1 ; $\sqrt{5}$; -3 ; $-2,5$; $-\sqrt{11}$.

b) Ordonează crescător aceste numere.

4. a) Pe axa cu originea O de mai jos sunt punctele A și B , astfel încât $OA = 4$, $OB = 2$. Ce coordonate au punctele A și B ?

b) Dacă a și b sunt coordonatele punctelor A și respectiv B , exprimă $|a|$ și $|b|$.



★★

5. Pentru $a = -1,5$ calculează: a^2 ; $\sqrt{a^2}$; $|-a|$;
 $|a| + 1$; $|-a + 1|$; $|a^2 - 1|$; $|(a-1)(a+1)|$.

6. Cu un calculator de buzunar, încadrează între două numere raționale cu trei zecimale, numerele: $\frac{25}{7}$; $3,49 \cdot 0,0058$; $\frac{3\sqrt{2}}{5}$.

Propune o problemă pentru proiect, care se rezolvă printr-una dintre operațiile efectuate.

7. Alege răspunsul corect!

Dacă $5,28785 < a < 5,28786$, atunci rotunjirea lui a la ordinul miilor este:

A) 5,2 B) 5,287 C) 5,288 D) 5,28786

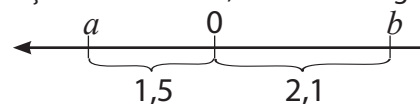
8. Fie $A = \left\{-1,2; -1\frac{3}{2}; \sqrt{1,44}; 0; -0,(2); \frac{1}{3}\right\}$.

Explicitează $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y = |x|, x \in A\}$.

9. Care dintre propozițiile următoare este adevărată, pentru orice număr real x ?

- a) $|x| = -x$, dacă $x < 0$; b) $|-x| = |x|$;
 c) $|-x| \geq 0$; d) $|-x| = -|x|$;
 e) $|-x| = x$, dacă $x < 0$.

10. Precizează semnul și modulul numerelor a și b reprezentate pe axa de mai jos. Atenție la sensul axei, indicat de săgeată!

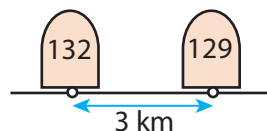


★★★

11. **Investigație**

a) Pe axă, modulul unui număr este distanța de la punctul prin care reprezentăm numărul pe axă, până la origine. Identifică pe axă numerele cu modulul egal cu 2.

b) Pe o șosea, distanța dintre bornele pe care scrie 132 și 129 este de 3 km, adică $|129 - 132|$.



Folosește această interpretare pentru a exprima, pe axă, distanța dintre punctele prin care reprezentăm numerele: 3 și 7; -1 și -5; -4 și 6; x și y .

c) Folosește calculele anterioare și reprezintă pe axă mulțimile: $\{x \mid x \in \mathbb{R}, |x - 1| = 2\}$, $\{x \mid x \in \mathbb{R}, |x - 1| \leq 3\}$.

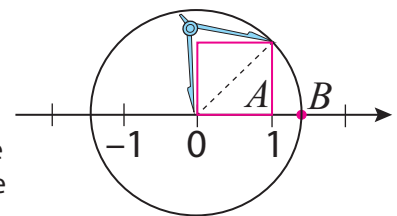
12. Care dintre propozițiile următoare sunt adevărate?

- a) $|-1,5| < 0$; b) $|\sqrt{-27}| = |\sqrt{27}|$;
 c) $|-10^{2000}| \geq 0$; d) $|3^{10}| < -3^{10}$;
 e) $|(-401) \cdot (-403)| = |-401| \cdot |403|$;
 f) $|-3 - \sqrt{3}| > |3| + |-\sqrt{3}|$.

13. Observă figura de mai jos.

a) Determină abscisa punctului B .

b) Găsește trei numere raționale care se reprezintă pe axa numerelor prin puncte situate între A și B .



★★★★

14. Folosește reprezentarea pe axă și demonstrează că $|a - b| + |b - c| \geq |a - c|$, pentru orice numere $a, b, c \in \mathbb{R}$.

●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A

Reprezintă pe axă următoarele numere: 3; 2; 0,5.

B

Reprezintă pe axă toate numerele care au modulul 0,9 și respectiv 1,9.

C

Reprezintă pe axă, apoi calculează modulele numerelor: $\sqrt{2} - 2$; $\sqrt{5} - 2$.

O situație-problemă

Un atlet este admis la o competiție dacă are înălțimea de cel puțin 1,6 m și cel mult 2,1 m. Pentru verificarea rapidă a condiției impuse, oficialii concursului au marcat înălțimile extreme pe aparatul cu care măsoară înălțimile. Atletul din figură va fi admis în competiție?

Vrem să știm!

Cum descriem cât mai simplu, cu ajutorul numerelor și mulțimilor, diverse porțiuni din axa numerelor?



În viața de zi cu zi, folosim de multe ori cuvântul „interval”. Iată câteva exemple:

- Temperaturile înregistrate într-o zi de vară pot varia între 25°C și 35°C.
- Viteza unui automobil pe un drum poate fi, de exemplu, cuprinsă între 50 km/h și 90 km/h. Acest interval poate influența siguranța rutieră.
- Înălțimile elevilor dintr-o clasă pot fi cuprinse în intervalul cuprins între 1,40 m și 1,80 m.
- În magazine, un interval de prețuri pentru haine poate varia între 100 lei și 300 lei.
- Timpul ne ghidează viața, iar intervalele de timp în care au loc diferite activități ne umplu orarul zilnic.

Exprimare orală

Propune și alte exemple de intervale folosite în viața reală!

➔ 1. Ce înțelegem prin interval de numere reale?

Axa numerelor reale are proprietatea că, fiind date două *numere reale diferite*, oricât de apropiate, se poate găsi un al treilea număr real, situat între ele. Numerele date se numesc **margini** sau **capete**, iar mulțimea de numere cuprinsă între cele două capete formează un **interval**. Sintagma „situat între ele” este ușor ambiguă. De aceea, pentru a preciza foarte clar la ce ne referim, vorbim despre intervale închise și intervale deschise.

Definim	Notăm	Reprezentăm
Un interval închis este un interval care își conține marginile.	$[a; b]$	
Un interval deschis este un interval care nu își conține marginile.	$(a; b)$	

După cum se observă, un interval închis sau un interval deschis se reprezintă pe axa numerelor prin segmente. Pe axa numerelor, putem delimita și semidrepte.

Semidreptele corespund unor **intervale nemărginite**. Pentru scrierea intervalelor nemărginite folosim simbolurile: $-\infty$ (minus infinit), $+\infty$ (plus infinit).

Folosim convențiile alăturate.

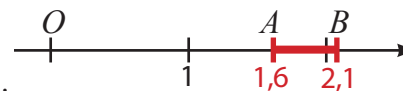
Notăm	Reprezentăm
$[0; +\infty)$	
$(-\infty; 1]$	

Rezolvăm situația-problemă

Mulțimea numerelor reale care sunt cel puțin egale cu 1,6 și cel mult egale cu 2,1 se reprezintă pe axă prin segmentul AB . Orice punct P al acestui segment corespunde unui număr real h , unde $1,6 \leq h \leq 2,1$.

Aceasta indică faptul că atletul este admis.

Relația $1,6 \leq h \leq 2,1$ se poate scrie $h \in [1,6; 2,1]$. Mulțimea $[1,6; 2,1]$ este un interval închis de numere reale.



→ 2. Ce tipuri de intervale de numere reale folosim?

Definim următoarele tipuri de intervale:



Tip de interval		Exemplu	
		Scriem	Reprezentăm
Intervale mărginite	Interval închis $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$[-1; 2]$	
	Interval deschis $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	$(-1; 2)$	
	Interval deschis la stânga și închis la dreapta $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	$(-1; 2]$	
	Interval închis la stânga și deschis la dreapta $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[-1; 2)$	
Intervale nemărginite	Intervale nemărginite la dreapta $[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	$[-1; +\infty)$	
	$(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	$(-1; +\infty)$	
	Intervale nemărginite la stânga $(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	$(-\infty; 2]$	
	$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	$(-\infty; 2)$	

Ce fel de intervale apar în programul afișat?



PROGRAM
L-V: 08:30 - 22:30
S: 09:00 - 20:00
D: 09:00 - 16:00

**Gândim critic
și constructiv!**

→ 3. Cum stabilim incluziunea intervalelor?

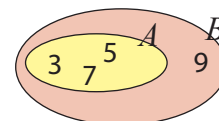
●●●▶ Ne amintim și extindem!

Pentru două mulțimi A și B , spunem că A este inclusă în B dacă orice element din A se află și în B .

Notăm	Citim
$A \subset B$	Mulțimea A este inclusă în B .
$B \supset A$	Mulțimea B include mulțimea A .

Exemple:

- $\{3; 5; 7\} \subset \{3; 5; 7; 9\}$.
- $\{3; 5; 7; 9\} \supset \{3; 5; 7\}$.

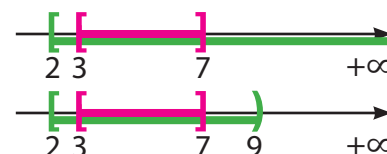


Întrucât intervalele sunt mulțimi de numere, putem defini incluziunea lor. Fiind date două intervale de numere reale I și J , spunem că **intervalul I este inclus în intervalul J** dacă orice element din I se află și în J .

Notăm	Citim
$I \subset J$	Intervalul I este inclus în intervalul J .
$I \supset J$	Intervalul I include intervalul J .

Exemple:

- $[3; 7] \subset [2; +\infty)$.
- $[2; 9) \supset [3; 7]$.



Atenție! Intervalele sunt submulțimi ale lui $\mathbb{R}$. Însă, nu orice submulțime a lui $\mathbb{R}$ este interval.

Exemplu: Mulțimea $\{1; 2; 3\}$ nu este interval:

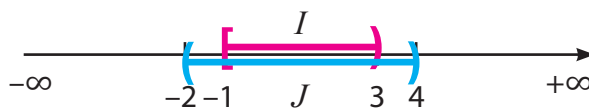


●●●●▷ **Problemă rezolvată**

Se consideră intervalele $I = [-1; 3]$ și $J = (-2; 4)$. Stabilește dacă $I \subset J$.

Rezolvare:

Reprezentăm intervalele I și J pe axa numerelor. Observăm că orice punct din primul interval aparține și celui de-al doilea interval. Deci $I \subset J$.



●●●●▷ **Probleme propuse**

★ 1. Notează mulțimile folosind simboluri:

- a) intervalul închis de la $-\sqrt{5}$ la $\sqrt{7}$;
- b) intervalul deschis de la -3 la $2\sqrt{5}$;
- c) intervalul închis de la $-\infty$ la 10 ;
- d) intervalul deschis de la 3 la $+\infty$.

2. Adevărat sau fals? Mulțimea numerelor reale x , cu proprietatea $x > 5$, este $[5; +\infty)$.

3. Reprezintă pe axă intervalele următoare:

- a) $[-3; 5]$; b) $(-5; 1]$; c) $[\sqrt{3}; 6]$;
- d) $(-\infty; 7]$; e) $[10; +\infty)$; f) $(-\infty; -9]$.

★★

4. Notează și reprezintă pe axa numerelor intervalul:

- a) deschis, cu capetele -1 și 1 ;
- b) cu capetele -3 și 2 , deschis la stânga, închis la dreapta;
- c) cu capetele -4 și 2 , închis la stânga, deschis la dreapta;
- d) deschis, cu capetele $-\sqrt{5}$ și $\sqrt{7}$;
- e) nemărginit la stânga și deschis la dreapta, la 6 ;
- f) nemărginit la stânga și închis la dreapta, la 1 ;
- g) nemărginit la dreapta și închis la stânga, la 5 ;
- h) deschis, de la $-\infty$ la 10 ;
- i) închis, de la 3 la $+\infty$.

5. Stabilește care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

- a) $0 \in (-1; 1)$; b) $2 \notin (-3; 2]$;
- c) $-3 \in [-3; 5]$; d) $\sqrt{2} \in (1, 4; +\infty)$;
- e) $-\sqrt{3} \notin (-\infty; -1, 73]$; f) $3 \notin (-2; +2)$.



6. Exprimă variațiile mărimilor prin intervale:

- a) o distanță până la destinație, care este de cel mult 150 km;
- b) capacitatea unui recipient, care variază între $0,05 \text{ dm}^3$ și $1,5 \text{ l}$;
- c) masa unei cutii pe care este scris $500 \text{ g} \pm 10 \text{ g}$.

★★★

7. Transcrie intervalele, folosind notații:

- a)
- b)
- c)
- d)

8. Analizează reprezentările de la exercițiul 7 și precizează căror intervale aparțin numerele: 0 ; 1 ; -2 ; $0,5$; $\sqrt{2}$; $-3,4$.

9. Determină numerele a și b pentru care $[a; b] \subset [0; 1]$, $0 \in [a; b]$ și $1 \in [a; b]$.

Propune și rezolvă un exercițiu asemănător.

★★★★

10. Fie un interval $[a, b]$ cu $b - a \geq 1$. Arată că acest interval conține cel puțin un număr întreg.

11. Dacă $[x; y] \cap \mathbb{Z} = \emptyset$, calculează $-|x - y| + 2|x - y - 1| + |x - y + 2|$.

●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A

Scrie cel mai mic și cel mai mare număr întreg din intervalul $(-3; 10, 1]$.

B

Care dintre numerele $2, (1); |-\sqrt{3}|$; $\sqrt{5}$, se află în intervalul $(-2; 2, 2]$?

C

Reprezintă pe axa numerelor intervalul

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -0, (6) < x \leq \sqrt{3^2 + 4^2} \right\}$$

► O situație-problemă

Nic vrea să meargă în aceeași zi și la bibliotecă și la secretariatul școlii. În fiecare zi lucrătoare, programul bibliotecii este de la ora 10.00 la ora 17.00, iar al secretariatului este de la ora 8.00 la ora 14.00. În ce interval orar ar trebui să se încadreze ca să găsească și biblioteca și secretariatul deschise?

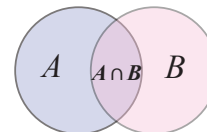
Vrem să știm!

Cum se efectuează intersecția și reuniunea intervalelor de numere reale?

➔ 1. Cum se efectuează intersecția intervalelor?

► Ne amintim și extindem

- Intersecția mulțimilor A și B este mulțimea elementelor comune mulțimilor A și B : $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$.
- Intersecția a două intervale I și J este mulțimea care conține toate elementele comune intervalelor I și J : $I \cap J = \{x \mid x \in I \text{ și } x \in J\}$.



Exemple:

Intersecția intervalelor $I = (-\infty; 2]$ și $J = [-4; +\infty)$:

Reprezentăm: Obținem: $I \cap J = (-\infty; 2] \cap [-4; +\infty) = [-4; 2]$.

Intersecția intervalelor $I = [-1; 5]$ și $J = (-2; 4)$:

Reprezentăm: Obținem: $I \cap J = [-1; 5] \cap (-2; 4) = [-1; 4]$.

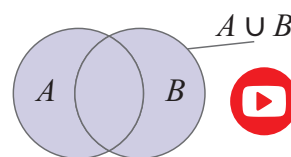
► Rezolvăm situația-problemă

Ca să găsească și secretariatul și biblioteca deschise, Nic trebuie să aleagă o oră comună celor două intervale orare de funcționare. Pentru aceasta trebuie să determine intersecția intervalelor $[8; 14]$ și $[10; 17]$. Dacă alege o oră din intervalul $[8; 14] \cap [10; 17] = [10; 14]$ va găsi deschise și secretariatul și biblioteca.

➔ 2. Cum se efectuează reuniunea intervalelor?

► Ne amintim și extindem

- Reuniunea mulțimilor A și B este mulțimea care conține toate elementele mulțimilor A sau B , luate o singură dată: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$.
- Reuniunea a două intervale I și J este mulțimea care conține toate elementele intervalelor I sau J , luate o singură dată: $I \cup J = \{x \mid x \in I \text{ sau } x \in J\}$.



Exemple:

Mulțimea numerelor x cu proprietatea că $x \leq 2$ sau $x < 5$:

Reprezentăm: Obținem: $(-\infty; 2] \cup (-\infty; 5) = (-\infty; 5)$.

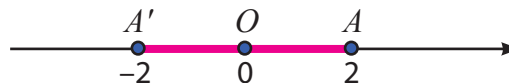
Reuniunea intervalelor $I = [-1; 5]$ și $J = (-2; 4)$:

Reprezentăm: Obținem: $I \cup J = [-1; 5] \cup (-2; 4) = (-2; 5]$.

✈ 3. Cum folosim modulul în exprimarea unui interval de numere reale?

●●●● ▶ Explorăm ...

Considerăm intervalul $[-2; 2]$, care este simetric față de originea axei. Observăm că toate numerele din acest interval au proprietatea că distanța de la origine la punctul corespunzător lor pe axa numerelor este cel mult 2. Reciproc, toate punctele aflate la o distanță de cel mult 2 față de origine aparțin intervalului considerat. În concluzie $[-2; 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 2\}$.



În general, pentru un număr pozitiv $a \in \mathbb{R}$ avem:

• $[-a; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq a\}$



• $(-a; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < a\}$



●●●● ▶ Problemă rezolvată

Considerăm mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{R}, x > 0,5 \text{ sau } x < -0,5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 2\}$ și numărul $a = 1 + \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 9} + \frac{5}{9 \cdot 14}$.

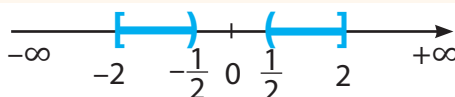
a) Calculează: $A \cup B$ și $A \cap B$; **b)** Arată că $a \in A \cap B$.

Rezolvare:

Cum gândim?	Cum redactăm rezolvarea?
Acordăm atenție cuvântului „sau” din definiția mulțimii A . Scriem mulțimea A ca o reuniune de două intervale. Folosim reprezentări pe axă, pentru a explicita mulțimile.	a) $A = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ $B = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 2\} = [-2; 2]$ Rezultă $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \left[-2; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right]$.
Calculăm numărul a , observând legăturile dintre numitori și numărători	b) $a = 1 + \frac{5-2}{2 \cdot 5} + \frac{9-5}{5 \cdot 9} + \frac{14-9}{9 \cdot 14} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{14} =$ $= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{14} = 1 + \frac{6}{14} = 1\frac{3}{7}$. Cum $\frac{1}{2} < 1\frac{3}{7} \leq 2$, deducem că $a \in \left(\frac{1}{2}; 2\right]$, deci $a \in A \cap B$.



Reuniunea a două intervale este mereu un interval? Justifică răspunsul dat.



Gândim critic și constructiv!

●●●● ▶ Evaluăm nivelul de bază

Reprezintă prin desen mulțimile:

a) $[-3; 3]$; **b)** $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1\}$; **c)** $C = (-\infty; 4) \cup [2; +\infty)$; **d)** $D = (-\infty; 4) \cap [2; +\infty)$.

●●●●▷ **Probleme propuse**

★

1. Alege răspunsul corect! Cardinalul mulțimii $(-2; 1) \cap \mathbb{Z}$ este:

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

2. Determină:

- a) $(1; 2) \cup \{1\}$; b) $(-1; 2,5) \cup \{2,5\}$;
c) $(1; \sqrt{2}) \cup \{1,4\}$; d) $(-1; 2) \cup \{-1; 2\}$.

3. Determină:

- a) $[-2; 4] \cap \{4\}$; b) $[-2; 4] \cap [4; 8]$;
c) $[-12; 4] \cap [-6; 4]$; d) $(-3; 6) \cap (2; +\infty)$.

★★

6. Scrie cu ajutorul intervalelor următoarele mulțimi:

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\}$;
b) $B = \{y \in \mathbb{R} \mid |y| < 8\}$;
c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq \frac{1}{2}\right\}$.

4. Determină următoarele intersecții:

- a) $(-\infty; 3) \cap (0; +\infty)$; b) $[-7; 3] \cap [\sqrt{2}; 4]$;
c) $(-\infty; 4) \cap [-5; 6]$; d) $[-17; 3] \cap \mathbb{N}$;
e) $[-2; 3] \cap \mathbb{Z}$.

5. Determină următoarele reuniuni:

- a) $(3; 8) \cup [8; 10]$;
b) $(3; 8) \cup [5; 9]$;
c) $(-\infty; 3) \cup (0; +\infty)$;
d) $(1,73; +\infty) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.

7. Calculează $A \cup B$ și $A \cap B$ pentru:

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 7\}$ și $B = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y < 10\}$;
b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 2\}$ și $B = \{y \in \mathbb{R} \mid |y| < 4\}$;
c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 9\}$ și $B = \{y \in \mathbb{R} \mid |y| < 6\}$;
d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 6\}$ și $B = \{y \in \mathbb{R} \mid |y| \leq 8\}$.

★★★

8. Citește enunțurile:

- 1 În cazul unui sondaj, procentul participanților la vot a fost cuprins între 45% și 60%, iar în cadrul altuia a fost cuprins între 50% și 65%.
2 La Zoo, s-au născut în captivitate elefanți în perioada 1989 - 2010 și tigri, în perioada 1995 - 2020.

Indică prin operații cu intervale perioadele în care:

- a) evenimentele au avut loc simultan;
b) s-a produs unul sau altul dintre evenimente.

9. Alege răspunsul corect! Rezultatul calculului $[-2; 4) \cup (0; 6] \cap (-3; 6)$ este:

- A) $(-3; 6)$ B) $(-2; 6)$ C) $(-3; 4]$ D) $[-2; 6)$

10. Alege răspunsul corect! Care dintre rezultatele următoarelor operații cu intervale nu este un interval?

- A) $[0; 2) \cup [2; 5)$ B) $(-1; 3] \cup [2; 4)$
C) $[1; 4] \cap (-\infty; 2)$ D) $[0; 2) \cup (2; +\infty)$

11. Determină numerele întregi a, b pentru care:

- a) $(a; b) \cap \mathbb{Z} = \{1\}$;
b) $[a; b) \cap \mathbb{Z} = \{1; 2\}$.

★★★★

12. Determină numerele întregi a și b astfel ca:

$$(a; b) \cup [2; 4] = [2; b] \text{ și } (a; b) \cap [3; 5] = [3; b).$$

13. Despre numerele reale a și b se știe că mulțimea $(-\infty; a) \cap [b; +\infty)$ are un singur element. Calculează $(b - a)^{2025}$.



●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A

Determină $I \cup J$ și $I \cap J$ pentru $I = [-3; 3]$ și $J = (-2; 5)$.

B

Scrie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3, 2\}$ sub formă de interval și determină $A \cap \mathbb{Z}$.

C

Determină intervalul I astfel încât $(0; 7) \cup I = (0; 9)$ și $(0; 7) \cap I = (1; 7)$.

●●●●▷ O situație-problemă

Un olar își vinde vasele cu 75 lei bucata. 35% din prețul fiecărei bucăți reprezintă profit. Câte vase ar trebui să vândă olarul pentru a achita împrumutul de 10000 lei făcut pentru modernizarea atelierului?

Pentru a rezolva această problemă, ar trebui să aflăm numărul necunoscut x ,

pentru care $\left(\frac{35}{100} \cdot 75\right) \cdot x \geq 10000$.



Vrem să știm! >>>

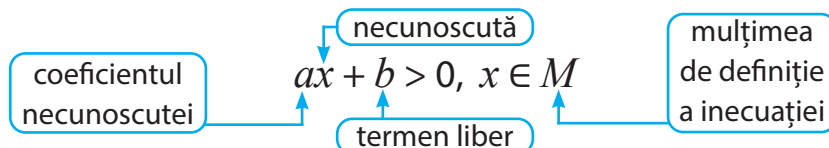
Cum rezolvăm inecuațiile de forma $ax + b > 0$ ($\leq, <, \geq$), unde $a, b \in \mathbb{R}$?

●●●●▷ Ne amintim și extindem

Fiecare dintre scrierile

$2x + 3 > 0, x \in \mathbb{Z}; \quad 3x - 5 \geq 0, x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}; \quad -x + 3 < 0, x \in \mathbb{Q}; \quad 4x - 15 \leq 0, x \in [0; 7]$ reprezintă o inecuație cu necunoscuta x .

Inecuația este o inegalitate care conține unul sau mai mulți termeni necunoscuți și care devine adevărată numai pentru anumite valori ale necunoscutelor. Folosim următoarele denumiri:



Definim:

Necunoscuta x ia valori din **mulțimea de definiție** a inecuației. Dacă mulțimea de definiție nu este precizată, se consideră că aceasta este mulțimea $\mathbb{R}$.

Soluție a unei inecuații este un număr din mulțimea de definiție care transformă inecuația într-o inegalitate adevărată, atunci când înlocuiește necunoscuta.

A rezolva o inecuație înseamnă să scriem mulțimea tuturor soluțiilor inecuației.

Exemple:

În inecuația $4x - 15 \leq 0, x \in [0; 7]$, necunoscutei x i se pot atribui valori numere reale din intervalul $[0; 7]$.

-1 este soluție a inecuației $2x + 3 > 0, x \in \mathbb{Z}$, pentru că $-1 \in \mathbb{Z}$ și inegalitatea $2 \cdot (-1) + 3 > 0$ este adevărată.

-2 nu este soluție a inecuației $2x + 3 > 0$ pentru că $2 \cdot (-2) + 3 > 0$ nu este adevărată.

Mulțimea soluțiilor ecuației $x > 0$ este intervalul $(0; +\infty)$. Notăm $S = (0; +\infty)$.

Două inecuații se numesc **echivalente** dacă au aceeași mulțime a soluțiilor. Prin următoarele transformări obținem **inecuații echivalente**:

Transformarea	Exemple	
Adunăm în ambii membri același număr.	$x + 2 \leq 0 \quad -2$ $x \leq -2$	$x - 5 \geq 0 \quad +5$ $x \geq 5$
Înmulțim sau împărțim ambii membri cu același număr pozitiv nenul.	$3x \leq 6 \quad :3$ $x \leq 2$	$0,5x \geq 5 \quad \cdot 2$ $x \geq 10$
Înmulțim sau împărțim ambii membri cu același număr negativ și schimbăm sensul inegalității.	$-3x \leq 6 \quad :(-3)$ $x \geq -2$	$-0,5x \geq -5 \quad \cdot (-2)$ $x \leq 10$



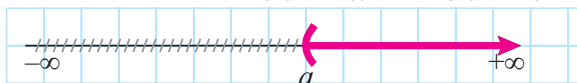
Scrie mulțimea de soluții pentru fiecare dintre inecuațiile din tabel.

<<< **Gândim critic și constructiv!**

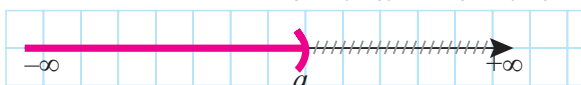
●●●●▷ Rezolvăm inecuații

- Pentru cele mai simple inecuații procedăm astfel:

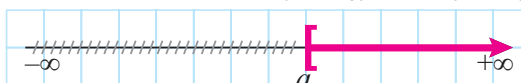
① $x > a \Leftrightarrow x \in (a; +\infty), S = (a; +\infty)$



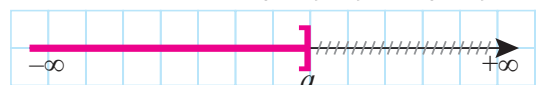
③ $x < a \Leftrightarrow x \in (-\infty; a), S = (-\infty; a)$



② $x \geq a \Leftrightarrow x \in [a; +\infty), S = [a; +\infty)$



④ $x \leq a \Leftrightarrow x \in (-\infty; a], S = (-\infty; a]$



- Pentru inecuațiile de forma $ax + b > 0$ ($\leq, <, \geq$), unde $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$, procedăm astfel:

Cum gândim:	Cum scriem:	
	⑤ $\sqrt{2}x - 4 \geq 0, x \in \mathbb{R}$	⑥ $-1,5x + 3 > 0, x \in [0; 3]$
① Separăm termenul care conține necunoscuta.	$\sqrt{2}x - 4 \geq 0 \quad +4$ $\sqrt{2}x \geq 4$	$-1,5x + 3 > 0 \quad -3$ $-1,5x > -3$
② Împărțim ambii membri la coeficientul necunoscutei.	$\sqrt{2}x \geq 4 \quad : \sqrt{2}$ $x \geq 2\sqrt{2}$	$-1,5x > -3 \quad : (-1,5)$ $x < 2$
③ Stabilim mulțimea soluțiilor inecuației.	$S = [2\sqrt{2}; +\infty)$	$S = (-\infty; 2) \cap [0; 3] = [0; 2)$

●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

$$\frac{35}{100} \cdot 75 \cdot x - 10000 > 0 \Leftrightarrow \frac{105}{4}x > 10000 \Leftrightarrow x > \frac{10000 \cdot 4}{105} \Leftrightarrow x > \frac{8000}{21} \Leftrightarrow x > 380 \frac{20}{21}.$$

Cum $x \in \mathbb{N}$, rezultă că $x \geq 381$. Olarul trebuie să vândă cel puțin 381 de vase.

●●●●▷ Evaluăm nivelul de bază

- Verifică dacă 1 este soluție a inecuației $7x - 6 > 0$.
- Rezolvă în mulțimea $\mathbb{R}$ inecuațiile: **a)** $x - 4 > 0$; **b)** $-6x > 6$; **c)** $3x - 80 \leq 0$.

●●●●▷ Descoperă greșeala

Descoperă cine a greșit în rezolvarea inecuației $\frac{-3x+1}{4} > 0$. Explică în ce constă greșeala în fiecare caz.

Rezolvarea Anei	Rezolvarea lui Tic	Rezolvarea Lizei	Rezolvarea lui Dan
$\frac{-3x+1}{4} > 0$ $-3x+1 > 4$ $-3x > 3$ $x < 1$ $x \in (-\infty; 1)$	$\frac{-3x+1}{4} > 0$ $-3x+1 > 0$ $-3x > -1$ $x < \frac{1}{3}$ $x \in \left(\frac{1}{3}; -\infty\right)$	$\frac{-3x+1}{4} > 0$ $-3x+1 > 0$ $-3x > -1$ $x > \frac{1}{3}$ $x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$	$\frac{-3x+1}{4} > 0$ $-3x+1 > 0$ $-3x > -1$ $x < \frac{1}{3}$ $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$



●●●●▷ **Probleme propuse**

★ 1. Verifică dacă 0 este soluție a inecuațiilor:

- a) $3x + 1 > 0$; b) $x - 1 \geq 0$;
c) $x + 2 < 0$; d) $2x - 4 \leq 0$.

2. Scrie sub formă de interval mulțimea de soluții a fiecăreia dintre inecuațiile:

- a) $x \geq -1$; c) $x \leq 3$; e) $x < -4$;
b) $x < 2$; d) $x > -4$; f) $x > -\sqrt{2}$.

3. Pentru inecuațiile de mai jos, efectuează transformările sugerate:

- a) $2x - 3 > 3x + 1$ | $-2x$
b) $-x + 1 < x + 2$ | $+x$
c) $3x + 4 \geq 2x$ | $\cdot 2$

4. Determină toate numerele naturale care sunt soluții ale inecuației $2x + 3 < 10$.



5. Un camion poate transporta o încărcătură de maxim 10 tone. Dacă un sac de ciment cântărește 20 kg, cu câți saci poate fi încărcat camionul?

6. Rezolvă inecuațiile: a) $x + 1 > 0$; b) $x + 1 \geq 0$;
c) $x + 1 < 0$; d) $x + 1 \leq 0$; e) $2x > -6$.

7. Efectuează transformările sugerate, pentru inecuațiile următoare:

- a) $4x - 2 \leq 6x$ | $: 2$
b) $-3x \leq 9$ | $: (-3)$
c) $5 - x > 3x$ | $\cdot (-1)$

★★

8. Care dintre următoarele numere este soluție a inecuației $2x + 3 < 11$?

- a) 1; b) 0; c) 4; d) -2; e) 2; f) -3;
g) $\frac{17}{5}$; h) 3,9; i) $2 + \sqrt{5}$; j) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

9. Care dintre următoarele inecuații au soluția 0,3?

- a) $x + 2 \leq 6$; b) $-x + 3 < 6$;
c) $x - 2 > 6$; d) $-x - 2 \geq 6$;
e) $-x - 2 \leq -1$; f) $x - 3 > -6$.

10. Rezolvă inecuațiile următoare:

- a) $2x \leq 4$; b) $3x < 6$; c) $4x \geq 2$;
d) $-2x \leq 6$; e) $x + 2 \geq 3$; f) $-x + 1 < 0$;
g) $\frac{x}{2} - \frac{1}{3} < 0$; h) $\frac{2x+1}{-3} \geq 0$; i) $\frac{x}{3} - 0, (6) > 0$;
j) $1 \leq 2 + x$; k) $-4 > -x + 1$; l) $3x - 9 < 0$;
m) $4 + 8x \leq 0$; n) $2x - 3 \leq 0,5$; o) $8 - 4x > 0$;
p) $3 - 2x < 6 - 4x$; q) $6x - 2 > 8 - 2x$.

★★★

11. Rezolvă inecuațiile următoare:

- a) $3x \leq 9, x \in \mathbb{N}$; b) $-x \geq -4, x \in \mathbb{N}^*$;
c) $x + 2 \leq -1, x \in \mathbb{Z}$; d) $2x - 1 < 5, x \in \mathbb{N}$;
e) $-3x < 6, x \in \mathbb{Z}$; f) $4x - 1 < 9, x \in \mathbb{N}^*$.

12. Rezolvă inecuațiile:

- a) $0 \cdot x + 1 \geq 0, x \in \mathbb{R}$; b) $0 \cdot x + 2 < 0, x \in \mathbb{R}$;
c) $0 \cdot x - 3 \leq 0, x \in \mathbb{R}$; d) $0 \cdot x - 4 > 0, x \in \mathbb{R}$.

13. Scrie sub formă de interval și reprezintă pe axa numerelor următoarele mulțimi:

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 \leq 5\}$;
b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{3} \geq -2\right\}$;
c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2}x + 2 > -1\right\}$.

★★★★

14. Determină mulțimea valorilor lui m pentru care 2 este soluție a inecuației $2x - m > 4$.

15. Alege răspunsul corect! Numărul m pentru care inecuația $mx \leq x + 4$, are soluția $[-2; +\infty)$ este:

- A) 2; B) 3; C) -1; D) -2.

16. Determină cel mai mic număr întreg care verifică inecuația $(1 - \sqrt{2})x - \sqrt{3} < 0$.

17. Rezolvă $\frac{x}{1 \cdot 3} + \frac{x}{3 \cdot 5} + \frac{x}{5 \cdot 7} + \frac{x}{7 \cdot 9} + \frac{x}{9 \cdot 11} < \frac{1}{2}$.

●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A

Determină mulțimea

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 1,5 < 0\}.$$

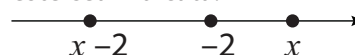
B

Determină mulțimea

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 0,3x - 1, (3) < 0\}.$$

C

Determină valorile lui x pentru care succesiunea numerelor pe axă este cea indicată:



●●●●▷ O situație-problemă

Într-un camion având capacitatea maximă de 10 t s-au încărcat 60 de saci cu câte 20 kg ipsos și 800 de cărămizi având câte 3 kg fiecare. Câți saci cu câte 50 kg de ciment se mai pot încărca?

Notăm cu x numărul sacilor de ciment care se pot adăuga. Observăm că inecuația atașată problemei, după ce am transformat convenabil unitățile de măsură, este: $60 \cdot 20 + 800 \cdot 3 + 50 \cdot x \leq 10\,000$, $x \in \mathbb{N}$.



Vrem să știm!

Cum aducem o inecuație la forma cea mai simplă?

➔ 1. Cum transformăm inecuațiile în forme echivalente, cu ajutorul proprietăților relației de ordine?

●●●●▷ Să ne amintim

Transformările aplicate cel mai frecvent unei inecuații, prin care aceasta se scrie sub o formă mai simplă, echivalentă, sunt:

- adunarea sau scăderea aceluiasi număr din ambii membri ai inegalității;
- înmulțirea sau împărțirea cu același număr nenul a ambilor membri ai inegalității.

$$\begin{aligned} x \leq y &\Rightarrow x + a \leq y + a, \text{ pentru orice } a \in \mathbb{R}; \\ x \leq y &\Rightarrow x \cdot a \leq y \cdot a, \text{ pentru orice } a > 0; \\ x \leq y &\Rightarrow x \cdot a \geq y \cdot a, \text{ pentru orice } a < 0. \end{aligned}$$

●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

$$\begin{aligned} 60 \cdot 20 + 800 \cdot 3 + 50 \cdot x &\leq 10\,000 \\ 1\,200 + 2\,400 + 50 \cdot x &\leq 10\,000 \\ 3\,600 + 50 \cdot x &\leq 10\,000 & | -3\,600 \\ 50 \cdot x &\leq 6\,400 & | :50 \\ x &\leq 128 \\ x &\in \{1; 2; 3; \dots; 127; 128\} \end{aligned}$$

Răspuns: Se pot încărca cel mult 128 de saci.

➔ 2. Cum rezolvăm inecuațiile de forma $\frac{a}{bx+c} < 0$ ($>, \leq, \geq$), cu $a, b \in \mathbb{R}^*$ și $c \in \mathbb{R}$?

●●●●▷ Exercițiu rezolvat

Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $\frac{-3}{1-3x} \leq 0$.

Rezolvare:

1 Numitorul trebuie să fie nenul: $1 - 3x \neq 0$, de unde $x \neq \frac{1}{3}$, deci $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$.

2 Pentru ca fracția să fie negativă, este necesar ca numitorul și numărătorul să aibă semne contrare.

Cum $-3 < 0$, rezultă $1 - 3x > 0$ | -1 .

$$-3x > -1 \quad | :(-3).$$

$$x < \frac{1}{3}. \text{ Soluția inecuației este } x \in \left(-\infty; \frac{1}{3} \right).$$

●●●●▷ Evaluăm nivelul de bază

1. Rezolvă inecuația: $2x - 5 \leq 3$, cu $x \in \mathbb{R}$. 2. Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $\frac{1}{x+1} > 0$.

Generalizăm

În rezolvarea unei inecuații de forma $\frac{a}{bx+c} > 0$ ($<, \leq, \geq$), unde $a, b \in \mathbb{R}^*$ și $c \in \mathbb{R}$, parcurgem următoarele etape:

- 1 Scriem condiția de existență pentru fracția $\frac{a}{bx+c}$, adică: $bx+c \neq 0$, $bx \neq -c$
de unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{c}{b}\right\}$.
- 2 Stabilim semnul numitorului, ca în tabel.
- 3 Rezolvăm inecuația obținută.

Semnul fracției	Semnul numărătorului	Semnul numitorului
$\frac{a}{bx+c} > 0$	$a > 0$	$bx+c > 0$
$\frac{a}{bx+c} < 0$	$a > 0$	$bx+c < 0$
$\frac{a}{bx+c} > 0$	$a < 0$	$bx+c < 0$
$\frac{a}{bx+c} < 0$	$a < 0$	$bx+c > 0$



Stabilește dacă implicația următoare este adevărată și justifică răspunsul dat.

$$\frac{a}{bx+c} \geq 0, \text{ cu } a \geq 0 \Rightarrow bx+c \geq 0$$

Gândim critic și constructiv!

➔ 3. Cum rezolvăm inecuațiile de forma $|ax+b| < c$ ($\leq$), cu $a \in \mathbb{R}^*$ și $b, c \in \mathbb{R}$?

Să comparăm

Geo și Liza au avut de rezolvat inecuația $|2x-1| \leq 5$.

Soluția lui Geo	Soluția Lizei
Inecuația este echivalentă cu: $-5 \leq 2x-1 \leq 5 \quad +1$ $-4 \leq 2x \leq 6 \quad :2$ $-2 \leq x \leq 3$ Deci $S = [-2; 3]$.	Inecuația dată devine: $2x-1 \leq 5$. Adunăm 1 și obținem: $2x \leq 6$. Împărțim cu 2, deci $x \leq 3$. Rezultă $x \in (-\infty; 3]$. Deci $S = (-\infty; 3]$.

Observăm că Liza și Geo au obținut intervale diferite ca soluție a inecuației. Putem arăta că intervalul determinat de Liza conține valori care nu verifică inecuația. De exemplu, alegem $x = -3$. Avem $|2 \cdot (-3) - 1| = 7 > 5$, deci nu verifică inecuația. Liza nu a procedat corect când a eliminat modulul!

Generalizăm

Pentru a rezolva inecuațiile de forma $|ax+b| < c$, cu $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$ parcurgem următoarele etape:

- 1 Stabilim semnul lui c .
 - Dacă $c \leq 0$, inecuația $|ax+b| < c$ nu are soluții, întrucât un modul, care este întotdeauna pozitiv sau 0, nu poate fi mai mic decât un număr negativ.
 - Dacă $c > 0$, continuăm rezolvarea cu etapa următoare.
- 2 Pentru $c > 0$, inecuația este echivalentă cu $-c < ax+b < c$. Această inecuație are soluția:

$$\begin{aligned} &\bullet \text{ pentru } a > 0, \quad x \in \left(\frac{-c-b}{a}; \frac{c-b}{a} \right); \\ &\bullet \text{ pentru } a < 0, \quad x \in \left(\frac{c-b}{a}; \frac{-c-b}{a} \right). \end{aligned}$$

●●●●▶ **Probleme propuse**

★ **1. Adevărat sau fals?**

Numărul 2 este soluție a inecuației $x + 4 > 5$.

★ **2. Alege un element al intervalului $(2; +\infty)$ și arată că este soluție a inecuației $2x - 1 > 3$.**

★ **3. Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuațiile:**

- a) $x + 4 < 7$; b) $2x + 3 \geq 9$; c) $3 - x > 5$;
 d) $3 - 5x < 4$; e) $6 \leq 1 + x$; f) $11 > 2x - 5$;
 g) $-2 < 4 - 3x$; h) $-5 \geq -4x - 1$; i) $9 \geq 1 - 2x$.

★★

★ **7. Rezolvă în mulțimea $\mathbb{R}$ inecuațiile:**

- a) $2x + 1 < 3 + 4x$; e) $0,5x + 1,2 > 2x$;
 b) $\frac{x+1}{4} + \frac{x}{2} < 1 + x$; f) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$;
 c) $80x + 40 \leq 60x - 10$; g) $2(1 - x) + 1 \geq x$;
 d) $\frac{1}{6} - \frac{x}{3} \geq \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$; h) $2,5(x - 1) \geq 3x$.

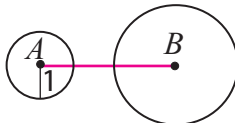
★ **8. Alege răspunsul corect! Cel mai mic număr întreg**

care este soluție a inecuației $\frac{x+1}{6} - \frac{x-1}{2} \leq 1$ este: **A) -2; B) -1; C) 1; D) 2.**



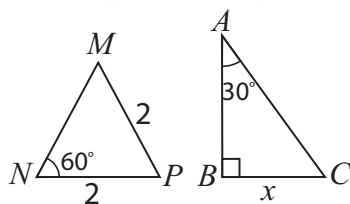
★★★

★ **11. În figura dată, segmentul AB are 4 cm, iar raza cercului cu centrul în A este de 1 cm. Ce lungime poate avea raza cercului cu centrul în B , astfel încât cele două cercuri să fie exterioare?**



★ **12. a) Verifică egalitatea $(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) = 6$.**

b) Determină valorile lui x , astfel încât triunghiul ABC din figura de mai jos să aibă perimetrul mai mare decât perimetrul triunghiului MNP .



★★★★

★ **16. Determină mulțimea numerelor reale care verifică simultan: $2x - 1 \leq 5$ și $3x + 8 > 2$.**

★ **4. Rezolvă inecuațiile de la exercițiul 3 în mulțimea numerelor întregi și apoi în mulțimea numerelor naturale.**

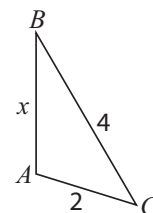
★ **5. Determină mulțimea valorilor pe care le poate avea lungimea laturii unui triunghi echilateral, dacă perimetrul său este cel mult egal cu 24 cm.**

★ **6. Determină mulțimea valorilor pe care le poate avea lungimea unui dreptunghi cu lățimea de 6 m, știind că aria sa este cel puțin egală cu 48 m².**

★ **9. O bancă s-a angajat ca, în timp de un an, să dubleze economiile depunătorilor săi. Pentru operațiunile bancare, fiecare depunător plătește la sfârșitul anului o taxă de 3 000 lei. Câți bani trebuie depuși pentru a nu ieși în pierdere?**



★ **10. Știm că într-un triunghi o latură este mai mică decât suma celorlalte două și este mai mare decât diferența lor. Între ce valori poate varia lungimea laturii AB a triunghiului alăturat?**



★ **13. Spunând o vrajă doar de el știută, Merlin, vrăjitorul Regelui Arthur, a dublat numărul de diamante din visteria regală. Pentru a-l răsplăti, Regele i-a dăruit 15 diamante, dar a constatat apoi că i-au rămas mai puține decât avea la început. Câte diamante a avut Arthur?**

★ **14. Rezolvă în mulțimea $\mathbb{R}$ și apoi în $\mathbb{Z}$ inecuațiile:**

- a) $|x + 3| \leq 2$; b) $|2 - x| < 6$; c) $|\sqrt{2} + x| < -9$;
 d) $|4x + 3| \leq 5$; e) $|3 - 5x| \leq 7$; f) $|2x + 3| \leq 0$;
 g) $\left| \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x \right| < 5$; h) $|2 - \sqrt{2}x| < \sqrt{18}$.

★ **15. Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuațiile: a) $\frac{-1,7}{4-6x} \geq 0$;**
 b) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2x-\sqrt{8}} > 0$; c) $\frac{-4}{3x+2} < 0$; d) $\frac{-4}{3(x+2)} > 0$.

★ **17. Determină numerele reale a pentru care avem $|2a - 3| = 3 - 2a$.**

●●●●▶ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A Rezolvă în mulțimea $\mathbb{R}$ inecuația $x - 3 \leq 2$.

B Rezolvă în mulțimea $\mathbb{R}$ inecuația $3(x - 2) + 5 > 4$.

C Rezolvă în mulțimea $\mathbb{R}$ inecuația $\frac{1-\sqrt{3}}{x\sqrt{2}+1} \leq 0$.

Recapitulăm prin probleme

1. Scrie toate elementele mulțimii P , formată din numerele naturale prime, de o cifră.
2. Descrie, prin câte o proprietate a elementelor lor, mulțimile:
 $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$; $B = \{10; 11; 12; \dots; 98; 99\}$;
 $C = \{-1; -4; -9\}$.
3. Desenează pe caiet o axă a numerelor. Reprezintă pe această axă intervalele $[2; 4]$ și $[-1; 3]$, apoi folosește desenele pentru a identifica intersecția și reuniunea acestor intervale.

★★

6. Completează pe caiet răspunsul corect! Cel mai mic număr întreg din intervalul $\left[-\sqrt{11}; \frac{14}{3}\right]$ este ...
7. Copiază pe caietul tău desenele următoare, ce prezintă o axă a numerelor. Colorează apoi pe acest desen, în „benzi” diferite, reprezentările intervalelor $(-\infty; 2)$ și $(-1; +\infty)$, apoi identifică intersecția acestor două intervale.

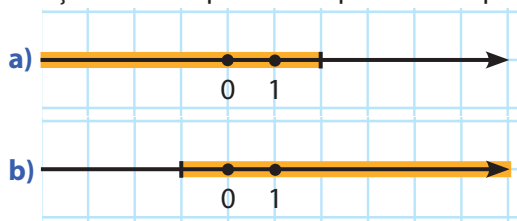


★★★

9. Un litru de benzină costă 7,25 lei. Domnul Pop dispune de 100 lei. Scrie sub formă de interval cantitățile posibile de benzină cu care domnul Pop își poate alimenta autoturismul, cu banii de care dispune.
10. Află numărul real a , pentru care intervalele $(-\infty; 2)$ și $(3a - 2; +\infty)$ au cel puțin un element în comun.
11. Pentru ce valori ale numărului real m , intervalele $[1 - m; +\infty)$ și $(-\infty; 2m]$ nu au elemente comune?

★★★★

14. Pentru fiecare caz în parte, scrie câte o inecuație de forma $2x - 1 > \dots$, pentru care mulțimea de soluții este cea reprezentată prin culoare pe axă.



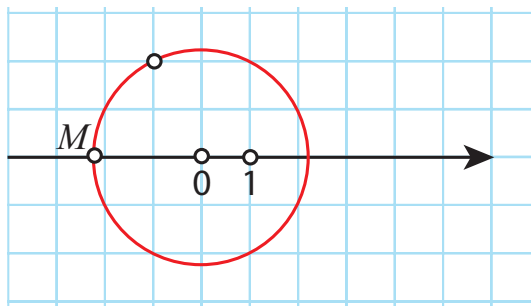
4. Rezolvă inecuațiile:

- | | |
|-------------------|-----------------|
| a) $x + 2 < -3$; | b) $4x < 2$; |
| c) $2 - x < 3$; | d) $-2x < 6$; |
| e) $x + 1 < 2x$; | f) $-3x > 12$. |

5. Pentru fiecare dintre inecuațiile următoare, scrie mulțimile de soluții:

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| a) $x + 2 \geq 1 + x$; | b) $5x < 3x + 6$; |
| c) $2x < -3x$; | d) $4x - 5 < 2x - 17$; |
| e) $2x - 3 < 7x$; | f) $8 - 3x > 12x - 10$. |

8. Observă desenul. Ce număr real a fost reprezentat pe axă în punctul M ?



12. O companie de transport aerian permite, în avioanele sale, doar bagaje de mână ce au dimensiuni maxime $40 \times 25 \times 20$ cm. Scrie sub forma unui interval valorile volumului (exprimat în dm^3) al unui bagaj cu formă paralelipipedică ce poate fi luat la bordul avioanelor acestei companii.



13. Adevărat sau fals? Inecuațiile

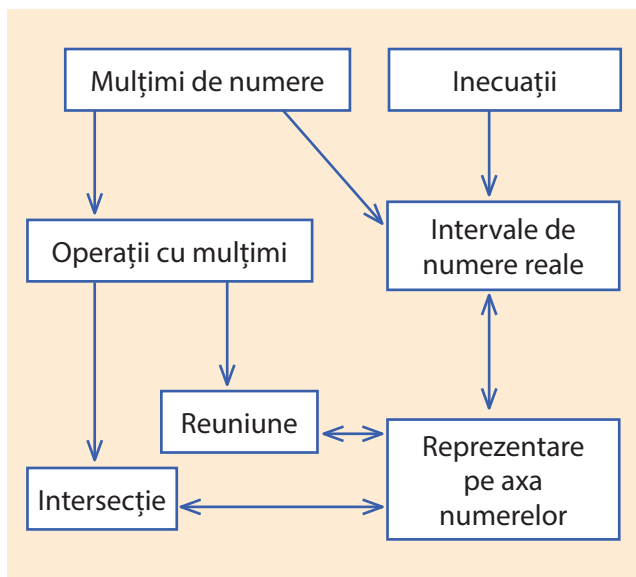
$$2x - 1 \geq 0 \text{ și } \frac{1}{2x - 1} \geq 0 \text{ sunt echivalente.}$$

15. Determină toate numerele naturale m pentru care -2 este soluție a inecuației $\frac{x}{2x + m} > 0$.

16. Determină cel mai mare număr întreg x care verifică simultan condițiile:
 $2(x - 3) \geq x$ și $x + 4 \geq \sqrt{3}(x - 3)$.

17. Pentru ce valori al numărului real m , inecuația $2x + 1 > mx + 5$ nu are soluții întregi?

Ce am învățat?



Utilizează schema de mai sus și adaugă în portofoliu elementele esențiale din lecțiile unității 1, referitoare la conceptele menționate.

Testul 1

- Desenează o axă a numerelor, apoi reprezintă pe aceasta intervalele $(-1; 2)$ și $[3; +\infty)$.
- Folosește reprezentarea pe axă și determină $[2; 4) \cap (-1; 3)$.
- Alege răspunsul corect!**
Numărul -2 este soluție a inecuației:
A) $x + 3 \leq 0$;
B) $|3x - 1| < 3$;
C) $x + 3 \geq 2x$;
D) $\frac{1}{x+5} < 0$.
- Rezolvă inecuația: $\frac{x+1}{2} \geq \frac{x}{3} - 1$.
- Pe axa numerelor din imagine sunt marcate prin culoare intervalele $(-\infty; -1]$ și $(1; +\infty)$.



Pe axă nu este marcată originea și nici unitatea de măsură. Copiază desenul pe caiet, apoi reprezintă pe axă intervalul $(-2; 0)$.

Rezolv testele pentru a verifica dacă pot:

- să reprezint pe axă intervale de numere reale
- să efectuez operații cu intervale
- să verific dacă un număr este soluție a unei inecuații date
- să rezolv inecuații de formele:
 $ax + b > 0$, $|ax + b| < c$,
sau $\frac{a}{bx + c} > 0$ (unde $a, b, c \in \mathbb{R}$),
sau inecuații reductibile la acestea
- să utilizez aproximări pentru reprezentări pe axă sau pentru comparări de numere reale.

Testul 2

- Desenează o axă a numerelor, apoi reprezintă pe aceasta intervalele $[0; 1]$ și $(-\infty; -1)$.
- Folosește reprezentarea pe axă și determină $[1; 3) \cap (-1; 2]$.
- Scrive pe caietul tău coduri de tipul **3A**, prin care asociezi inecuațiile din prima linie cu soluții ale lor din a doua linie:
1 $2x - 2 \geq x$; **2** $\frac{1}{2x + \sqrt{2}} < 0$; **3** $|x + 1| \leq 2$.
A. -4 **B.** 0 **C.** 2 **D.** $1,5$
- Rezolvă inecuația: $x - \frac{1}{2} < \frac{x+1}{3}$.
- Pe axa numerelor din imagine sunt marcate prin culoare intervalele $(-\infty; -2]$ și $(0; +\infty)$.



Pe axă nu este marcată originea și nici unitatea de măsură. Copiază desenul pe caiet, apoi reprezintă pe axă intervalul $(-1; 1)$.



Proiect: *Algebră ... geometrică*

Plan de lucru

- ➔ **Scop:** veți realiza un poster conținând proprietăți interesante ale expresiilor algebrice, proprietăți descoperite de voi.
- ➔ **Materiale necesare:** o coală A3, foi dintr-un caiet de matematică, riglă, creioane colorate.

Realizarea proiectului

Lucrați în echipe de trei, patru sau cinci colegi.

- ➔ Observați asemănări și deosebiri între diversele pătrate de pe pagină.
- ➔ Valorificați exercițiile care poartă simbolul de proiect. Acolo veți avea de exprimat ariile unor pătrate în două moduri, pentru a deduce formule utile.
- ➔ Observați pătratele mari **1**, **2**, **3**. Transcrieți-le pe foi cu pătrățele și colorați-le. Pentru fiecare, exprimați în două moduri aria pătratului mare. Ce formule deduceți?
- ➔ Aplicați toate produsele realizate pe posterul vostru.

Pentru început:

- ➔ Observați primul pătrat colorat. Exprimați aria pătratului de latură $a + b$ în două moduri și scrieți relația obținută.
- ➔ Desenați un pătrat similar colorat pe o foaie cu pătrățele, alegând $a = 2$ și $b = 3$. Verificați relația scrisă pentru aceste valori ale lui a și b .
- ➔ Faceți același lucru pentru alte valori.

i **Interacționați** în echipa voastră, realizați posterul, apoi **prezentați** în clasă rezultatele proiectului.

Autoevaluare

- ✓ Rezolvă problemele și alege răspunsurile corecte, pentru a verifica ce știi la început de unitate de învățare.

1. Rezultatul calculului $\sqrt{5} + 2\sqrt{20} - \sqrt{45}$ este:

- A) $-\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) 0 D) 5

2. Rezultatul calculului $\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{12}{5} \right]^{-1} : \left(\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{14} \right)$ este:

- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) 4

3. Soluția ecuației $-2x + 5 = -11$ este:

- A) 8 B) 3 C) -8 D) -3

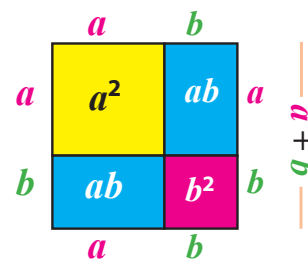
4. Mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 3\}$ este egală cu:

- A) $\{-3; 3\}$ B) $\{3\}$ C) $\{\sqrt{3}\}$ D) $\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

5. Numărul real x care verifică egalitatea

$$\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{3} = \sqrt{27} \text{ este:}$$

- A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $8\sqrt{3}$



1

b^2	bc
bc	c^2

2

a^2	ab	ac
ab	b^2	bc
ac	bc	c^2

3

d^2	ad	bd	cd
ad	a^2	ab	ac
bd	ab	b^2	bc
cd	ac	bc	c^2

Ce știi deja? Verific!

Test inițial de (auto)evaluare

Timp de lucru: 45 minute

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni și rezultate necesare pentru parcurgerea acestei Unități de învățare. Fiecare problemă propusă valorează 1 punct. Se acordă 1 punct din oficiu.

- I. Scrie pe foaia de rezolvare cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate:

Amplificare
și simplificare

1. Prin amplificarea cu 6 a raportului $\frac{10}{8}$, obținem ...

Operații cu numere
raționale

2. $\frac{2}{3} + \frac{5}{2} = \dots$

Radicali

3. Rădăcina pătrată a numărului 64 este ...

- II. Scrie pe foaia de rezolvare litera corespunzătoare răspunsului corect pentru problemele următoare:

Aria pătratului

4. Latura unui pătrat este egală cu 16 cm. Aria pătratului (exprimată în cm^2) este: **A)** 8 **B)** 4 **C)** 32 **D)** 256

Utilizarea
literelor
în calcule

5. Aria unui triunghi echilateral de latură a se poate calcula cu formula: $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$. Dacă triunghiul are perimetrul de 6 cm, aria sa (exprimată în cm^2) este: **A)** $9\sqrt{3}$ **B)** $\sqrt{3}$ **C)** $3\sqrt{3}$ **D)** 36.

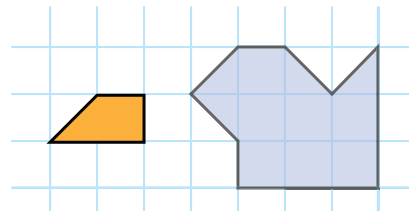
Descompunerea
numerelor naturale
în factori primi

6. Care dintre următoarele scrieri reprezintă o descompunere în factori primi a numărului 100?
A) $7 \cdot 13 + 3^2$ **B)** $2 \cdot 50$ **C)** $2 \cdot 5 \cdot 10$ **D)** $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$.

- III. Scrie pe foaia de rezolvare soluțiile complete ale exercițiilor următoare:

Compuneri și
descoperiri de
figuri geometrice

7. Folosește piese cu formă de trapez dreptunghic, ca în figura din dreapta, pentru a pava (fără suprapuneri) poligonul colorat în albastru. Câte piese ai folosit?



Ordinea operațiilor

8. Efectuează: $3 - 2 \cdot (4 + 1)^2$.

Calcul rapid

9. Efectuează cât mai rapid calculele următoare. Precizează ce proprietăți ale operațiilor cu numere raționale ai folosit de fiecare dată.
a) $13 - 21,7 + 4 + 21,7$ **b)** $2,3 \cdot 4,5 : 2,3$ **c)** $24 \cdot 8,5 + 24 \cdot 1,5$

Dacă ai obținut mai puțin de jumătate din punctaj la acest test, este util să revezi definițiile și proprietățile verificate mai sus, pentru a înțelege mai bine ceea ce urmează.

O situație-problemă

Tic economisește bani punându-i într-o pușculiță. A mai primit 100 lei de la bunica și 250 lei de la mama, dar a uitat ce sumă avea deja în pușculiță. Cum ar putea el exprima mai simplu suma de bani de care dispune?



Vrem să știm! Cum calculăm folosind litere?

Cum folosim literele în calcule?

Să ne amintim

- Chiar dacă nu cunoaștem lungimile laturilor unui dreptunghi, putem exprima sintetic perimetrul și aria acestuia.
- Chiar dacă nu cunoaștem lungimea laturii unui pătrat, putem exprima sintetic perimetrul și aria acestuia.
- Analog, putem exprima sintetic volumul unui cub de muchie l și volumul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile L, l, h .

$$\begin{array}{l} \text{Dreptunghi: } L, l \quad P_d = 2L + 2l; A_d = L \cdot l \\ \text{Pătrat: } a \quad P_p = 4a; A_p = a^2 \\ \text{Cub: } a \quad V_{\text{cub}} = a^3 \\ \text{Paralelipiped dreptunghic: } L, l, h \quad V_p = L \cdot l \cdot h \end{array}$$

Așadar, putem exprima numerele reale cu ajutorul literelor. Literele țin locul unor numere necunoscute.

Definim:

O **expresie algebrică** este o succesiune de numere și/sau litere legate între ele prin operații aritmetice, care pot fi: adunare, scădere, înmulțire și ridicare la putere.

Unele litere care apar într-o expresie algebrică se numesc **variabile**. Numerele sau literele care apar într-o expresie algebrică în afara variabilelor se numesc **coeficienți** (sau **constante**).

Exemple:

$2L + 2l$ și $L \cdot l$ sunt expresii algebrice.

L și l sunt variabile.
 2 este coeficient sau constantă.

Convenții de notație

- Evidențiem variabilele de care depinde o expresie scriindu-le între paranteze, în denumirea acesteia.

Celelalte litere care apar se consideră constante.

Semnul operației de înmulțire nu se mai scrie.

- Cea mai simplă expresie algebrică este formată dintr-un număr și una sau mai multe variabile legate numai prin înmulțiri. Vom numi mai simplu o astfel de expresie algebrică **monom**.

Dacă o expresie algebrică are doi termeni, îi vom spune **binom**.

Coeficientul 1 nu se mai scrie în monom.

Pentru coeficientul -1 , păstrăm numai semnul „-”.

Exemple:

Notăm	Citim
$E(x) = x - 25$	E de x este egal cu $x - 25$
$F(x; y) = x + y$	F de x și y este egal cu $x + y$

Pentru $E(x) = ax + b$, a și b sunt coeficienți.

$$5 \cdot a = 5a; \quad (x + y) \cdot (x - y) = (x + y)(x - y)$$

$$3 \cdot (x - y) = 3(x - y)$$

$$\text{coeficient} \quad 7x^2y^3 \quad \text{parte literală}$$

$7x^2y^3$; $-2a$; $9a^3bc$; $-2x^3yz$ sunt monoame.

$3x - 2y$; $1 - 2a^3bc$; $3x + 7xy$ sunt binoame.

În loc de $1a^3bc$ scriem a^3bc .

În loc de $-1a^3bc$ scriem $-a^3bc$.

Atunci când aplicăm, de exemplu, formula ariei dreptunghiului pentru anumite dimensiuni date, înlocuim literele cu acele numere și obținem o valoare numerică a ariei.

Valoarea numerică a unei expresii algebrice:

Dacă într-o expresie algebrică înlocuim fiecare variabilă cu un număr, atunci acea expresie capătă o anumită *valoare numerică* și devine o constantă.

Exemple:

Fie $E(x) = 6x + 3$.

Pentru $x = -2$, obținem $E(-2) = 6 \cdot (-2) + 3 = -9$.

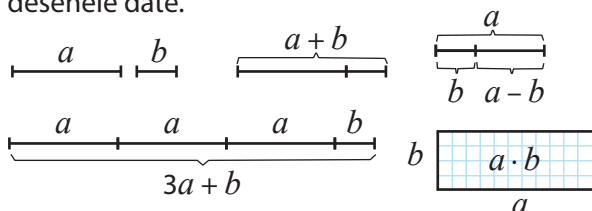
Pentru $x = 0$, obținem $E(0) = 6 \cdot 0 + 3 = 0 + 3 = 3$.

●●●●▶ Rezolvăm situația-problemă

Suma necunoscută din pușculiță o putem nota cu o literă, de exemplu x . În acest caz, suma nou obținută este $S(x) = x + 100 + 250 = x + 350$. Astfel, dacă Tic ar fi avut deja în pușculiță 400 lei, suma lui totală ar fi fost $S(400) = 400 + 350 = 750$ (lei), iar dacă ar fi avut 550 lei, suma lui totală ar fi fost $S(550) = 550 + 350 = 900$ (lei).

●●●●▶ Probleme propuse

1. Transcrie și completează tabelul, ajutându-te de desenele date.



a	b	$a + b$	$a - b$	$a \cdot b$	$3 \cdot a + b$
7	4				
$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$				
$3\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$				

2. Ilustrează prin câte un desen expresiile:

a) $x + 4$; b) $x - 4$; c) $x + 5$;
d) $x + y + 4$; e) $x - y + 4$; f) $6 + x - y$.

3. Ilustrează prin câte un desen enunțurile:

a) $m + n = 9$; b) $3n = 9$; c) y este dublul lui x ;
d) a este triplul lui x ;
e) y este cu 2 mai mic decât x ;
f) x este de 3 ori mai mic decât y ;
g) z este cu 7 mai mare decât triplul lui w .

4. Precizează variabilele și coeficienții pentru expresia $E(x) = 9x - 4$.

★★

5. Pentru expresiile algebrice următoare, precizează variabilele și constantele.

$$E(x) = 7x + 2a - 3; \quad F(y) = 3y - 5;$$

$$G(x; y) = 7x + 7y - 23; \quad H(x; z) = 8xz + 2ab - 3.$$

6. Calculează valoarea numerică a expresiilor algebrice, pentru: a) $x = 2$; b) $x = \sqrt{2}$

$$E(x) = 2x - 3; \quad F(x) = 3x^2 - 5;$$

$$G(x) = 2x^3 + 2; \quad H(x) = 2x^3 + \sqrt{2}.$$

★★★

9. Calculează valoarea numerică a expresiilor, pentru: a) $x = 2$ și $y = 3$; b) $x = -5$ și $y = \sqrt{3}$.

$$E(x; y) = 3x - 2y; \quad F(x; y) = 5xy - 30;$$

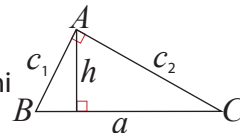
$$G(x; y) = 2y^2 + 2x + 4; \quad H(x; y) = 2x^2 - 2y^2 - 44.$$

7. Notează ca expresie algebrică, apoi reprezintă prin segmente, numărul:

a) de 3 ori mai mare decât numărul x ;
b) cu 2 mai mare decât dublul lui x .

8. Dacă b este un număr real pozitiv, care dintre numerele
 $a = 7(b + 1) + 3b + 1$ și
 $d = 4(b + 1) + 6(b + 2)$ este mai mare?

10. Folosind notațiile din figură, exprimă aria triunghiului dreptunghic ABC în două moduri. Apoi determină aria unui triunghi cu $h = 3$ cm și $a = 6$ cm.



●●●●▶ Alege și rezolvă în 5 minute!

Calculează valoarea numerică a expresiei algebrice



A $E(x) = 5x - 3$, pentru $x = 2$.



B $F(x) = 7x^2 + 2x - 8$, pentru $x = 6$.



C $G(x; y) = 9x^2y + 2\sqrt{2}y^2 - 3\sqrt{8}x$, pentru $x = 2$ și $y = \sqrt{2}$.

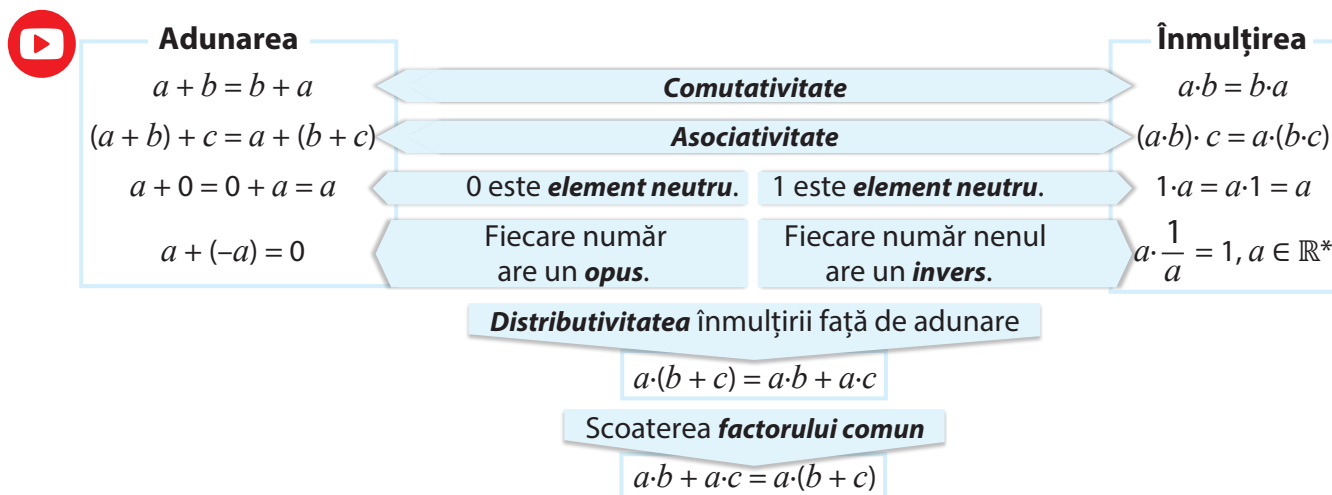
O situație-problemă

Tatăl lui Dan primește salariul lunar pe cardul de credit. În luna mai, când avea în cont 3 salarii, a mai primit o primă de 1000 lei și a cumpărat mobilă pentru noul apartament, în valoare de 9 000 lei. Pentru luna iunie, salariul lunar i s-a mărit cu 200 lei. În luna iulie, familia s-a mutat în noul apartament și a cheltuit cu această ocazie 20 000 lei. Care este situația pe card la sfârșitul lunii septembrie?

Vrem să știm! Cum adunăm numere reale exprimate prin litere?

În clasa a VII-a am studiat proprietățile adunării și, respectiv, înmulțirii numerelor reale. Evidențiem aceste proprietăți mai jos, pentru orice numere reale a, b, c .

1. Care sunt proprietățile adunării și înmulțirii numerelor reale exprimate prin litere?



Aceste proprietăți ne ajută să calculăm rapid:

Exemple:

$$\begin{array}{c} 100 \\ 15,29 + 23,87 + 84,71 = 123,87 \end{array}$$

$$79 \cdot 6 = (70 + 9) \cdot 6 = 70 \cdot 6 + 9 \cdot 6 = 420 + 54 = 474$$

$$\begin{array}{c} 0 \\ 23,87 \cdot 84,71 \cdot 0 = 0 \end{array}$$

$$48 \cdot 9 + 52 \cdot 9 = (48 + 52) \cdot 9 = 100 \cdot 9 = 900$$

De asemenea, ne ajută să scriem expresiile algebrice în forme cât mai simple. Deoarece în scrierea unor expresii algebrice apar litere la diferite puteri, e important să știm cum efectuăm produse de puteri.

Să ne amintim

Înmulțirea de puteri având aceeași bază: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, a \in \mathbb{R}^*, m, n \in \mathbb{Z}$

Exemplu: $x^3 \cdot x^2 = x^5$

2. Cum scriem produsele într-o formă mai simplă?

Exemple:

Într-o expresie algebrică în care apar numai operații de înmulțire, se înmulțesc întâi coeficienții și apoi variabilele.

$$7ax \cdot 8by = (7 \cdot 8) \cdot (ax \cdot by) = 56abxy$$

$$9ab \cdot (-2ab^3c) = [9 \cdot (-2)] \cdot ab \cdot ab^3c = -18a^2b^4c$$

➔ 3. Cum definim scăderea a două numere reale?

Din proprietățile adunării, știm că, pentru orice număr real a , există **opusul** său, notat $-a$, astfel încât $a + (-a) = 0$.

Deci $a = -(-a)$.

Pentru a **scădea** două numere reale **adunăm** primul număr cu opusul celui de-al doilea.

$$a - b = a + (-b), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Exemple:

$$7 - 12 = 7 + (-12) = -5$$

$$2x - (-6x) = 2x + 6x = 8x$$

➔ 4. Cum scriem sumele algebrice într-o formă mai simplă?

Termenii unei sume pot fi scriși în orice ordine (comutativitatea adunării). Aceasta ne permite să scriem expresiile algebrice în forme mai simple.

Definim:

Într-o expresie algebrică, doi sau mai mulți termeni care au aceeași parte literală (aceleași litere cu aceeași exponenți) se numesc **termeni asemenea**.

Exemple:

Termenii $-2x^3yz$ și $9x^3yz$ sunt asemenea.

Termenii $-2x^3yz$ și $9xy^3z$ nu sunt asemenea.

Pentru a aduce o expresie algebrică la forma cea mai simplă, efectuăm adunarea termenilor asemenea. Spunem că **reducem termenii asemenea**. Iată cum procedăm:

Tehnica de calcul

Reducerea termenilor asemenea constă în adunarea sau scăderea coeficienților lor. Partea literală se transcrie o singură dată, adică, dăm factor comun partea literală.

- Dacă sunt mai multe variabile, scriem variabilele în ordine alfabetică și reducem termenii asemenea.

- Dacă apar puteri, ele se scriu în ordine descrescătoare a exponenților.

Atenție!

- Dacă înaintea unei paranteze este semnul „+”, se elimină parantezele păstrând termenii cu semnul lor.

- Dacă înaintea unei paranteze este semnul „-”, se elimină parantezele schimbând semnele termenilor din paranteză.

Exemple:

$$8x + 9,5x = (8 + 9,5)x = 17,5x;$$

$$7y - 12y = (7 - 12)y = -5y$$

$$8x - 3x - 8x + 10x = 7x$$

$$\underline{9a} - 4b + \underline{2a} = \underline{9a} + \underline{2a} - 4b = 11a - 4b$$

$$\begin{aligned} \underline{5x} + 9x^2 + \underline{12y} - \underline{11x} - \underline{7y} &= \\ = (5 - 11) \cdot x + (12 - 7) \cdot y + 9x^2 &= \\ = 9x^2 - 6x + 5y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9a + (8a - 16a) &= 9a + 8a - 16a = \\ &= 17a - 16a = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3b - (7b - 10b) &= 3b - 7b + 10b = \\ &= -4b + 10b = 6b \end{aligned}$$

●●●▶ Rezolvăm situația-problemă

Pentru că nu se menționează salariul lunar inițial (de obicei, este confidențial), notăm valoarea acestuia cu x . Modelăm informațiile date astfel:

$$\text{Suma la finalul lunii mai: } S_1(x) = 3x + 1000 - 9000$$

$$\text{Suma la finalul lunii iunie: } S_2(x) = 3x + 1000 - 9000 + x + 200$$

$$\text{Suma la finalul lunii iulie: } S_3(x) = 3x + 1000 - 9000 + x + 200 + x + 200 - 20000.$$

Scriem $S_3(x)$ într-o formă mai simplă.

$$\text{Avem } S_3(x) = 3x + x + x + 1000 - 9000 + 200 + 200 - 20000 = 5x - 27600.$$

Cunoscând și salariul inițial, de 5500 lei, rezultă $S_3(5500) = 5 \cdot 5500 - 27600 = 27500 - 27600 = -100$ (lei).

Deci tatăl lui Dan trebuie să facă economii, pentru a echilibra cheltuielile.

●●●● ▷ **Exercițiu rezolvat**

Scrie în forma cea mai simplă expresia

$$E(x; y) = 6x^3yz - 4xz^2 - 2x^3yz + xz^2 + 3x^3yz + 4xz^2 - 6x^3yz$$

Tehnica de calcul

Identificăm în expresia dată termenii asemenea și îi subliniem în același fel.

Între termenii asemenea subliniați există termeni în care coeficienții sunt numere opuse? Dacă da, suma lor este zero și îi putem elimina.

Reducem termenii asemenea rămași. Verificăm că nu mai avem alți termeni asemenea de redus.

Rezolvare

$$\begin{aligned} E(x; y) &= \underline{6x^3yz} - \underline{4xz^2} - \underline{2x^3yz} + \underline{xz^2} + \underline{3x^3yz} + \underline{4xz^2} - \underline{6x^3yz} = \\ &= \cancel{6x^3yz} - \cancel{4xz^2} - \cancel{2x^3yz} + \underline{xz^2} + \cancel{3x^3yz} + \cancel{4xz^2} - \cancel{6x^3yz} = \\ &= \underline{xz^2} + \underline{xz^2} = 2xz^2 \end{aligned}$$

→ **5. Cum scriem produse de mai mulți factori într-o formă mai simplă?**



Tehnica de calcul

La înmulțirea expresiilor cu paranteze, aplicăm distributivitatea înmulțirii față de adunare: $(a + b) \cdot c = ac + bc$

Fiecare **termen** al sumei din paranteză se înmulțește cu **factorii** din afara ei. Nu uitați să respectați regula semnelor!

Dacă **factorul din afara parantezei este o paranteză** la rândul ei, atunci se procedează în doi pași: una dintre paranteze este văzută ca o nouă variabilă.

Exemple:

$$(8x + 7y) \cdot 3z = 8x \cdot 3z + 7y \cdot 3z = 24xz + 21yz$$

$$\begin{aligned} -3ax \cdot (8b - y) &= (-3ax) \cdot 8b + (-3ax) \cdot (-y) = \\ &= -24abx + 3axy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2a - 3b) \cdot (4x - 5y) &= 2a \cdot (4x - 5y) - 3b \cdot (4x - 5y) = \\ &= 8ax - 10ay - 12bx + 15by \end{aligned}$$

●●●● ▷ **Exercițiu rezolvat**

Efectuează înmulțirea și scrie în forma cea mai simplă expresia $(a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2 - 8ab^3 + 16b^4)(a + 2b)$.

Tehnica de calcul

Efectuăm înmulțirile, ținând cont de distributivitatea înmulțirii față de adunare.

Identificăm și reducem termenii asemenea.

Scriem rezultatul în forma cea mai simplă.

Rezolvare

$$\begin{aligned} &(a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2 - 8ab^3 + 16b^4)(a + 2b) = \\ &= a^5 - \cancel{2a^4b} + \cancel{4a^3b^2} - \cancel{8a^2b^3} + \cancel{16ab^4} + \\ &\quad + \cancel{2a^4b} - \cancel{4a^3b^2} + \cancel{8a^2b^3} - \cancel{16ab^4} + 32b^5 = \\ &= a^5 + 32b^5 \end{aligned}$$

●●●● ▷ **Evaluăm nivelul de bază**

Scrie fiecare expresie în forma cea mai simplă:

a) $-2 \cdot (-3) \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y^2 \cdot x \cdot 5;$

b) $z^2 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot z \cdot x \cdot 1;$

c) $x^3 \cdot y \cdot x \cdot y^2;$

d) $7x + 2x - 8 - 2x + 5x - 5;$

e) $x^2 + 2x - 8 - 2x^2 + x - 3;$

f) $3y^2 + 2y + 9 - 3y^2 - 3y - 10;$

g) $3(x - 2);$

h) $5x(2y - 3x + 2y);$

i) $3x \cdot (-2y + 5x) + 2(y - 3x + 2y);$

j) $(3x - 2y)(5x + 2y).$

●●●●▷ Probleme propuse

★ 1. Calculează:

- a) $3x + 7x$; b) $10a - 8a$; c) $2y - 9y$;
d) $-5x + 11x$; e) $-4t + t$; f) $-6x^2 - 2x^2$.

2. a) Precizează opusul fiecărui număr:

$+\sqrt{2}$; $-3,2\sqrt{2}$; $-0,3\sqrt{2}$.

b) Efectuează: $5\sqrt{2} - (+\sqrt{2})$;

$5\sqrt{2} - (-3,5\sqrt{2})$; $5\sqrt{2} - (-0,3\sqrt{2})$.

3. Redu termenii asemenea:

- a) $7x - 3x + 5x$; b) $-a - a - 3a + 8a$;
c) $7x^2 - 4x^2 + 2x^2$.

4. Exprimă cât mai simplu:

- a) $5ax \cdot 3by$; c) $0,5x^2 \cdot 4x^2$;
b) $(-7abc) \cdot 2a^2b$; d) $\frac{1}{7}x \cdot \frac{2}{5}x$.

★★

9. Fie expresia algebrică $E(x; y) = 5x^2y + 4xy^3 + 1$.
Calculează: $E(1; 0)$, $E(-1; 1)$, $E(1; y)$, $E(y; x)$.

10. Identifică termenii asemenea, subliniază-i în același fel, apoi efectuează calculele:

- a) $8x^2 + 16x - 10 - 8x - 16x^2 + 12$;
b) $x^2y^2 + 2xy + 1 - 2x^2y - xy^2 - 6xy^2 - 2xy$;
c) $6y^3 - 3y^2 - 6y^3 - 6y + 2 - 3y^2 + 7y$;
d) $3x^3y + 6xy^3 - 7x^2y^2 + x^3y^3 - 7xy^3 - 3x^3y + 7xy$.

11. Scrie într-o formă cât mai simplă expresiile:

- a) $2x^2 + 3x - 4x^2 - 3x$; c) $2z^2 + 2xz - xz - z^2$;
b) $2y + 3 - 2\sqrt{2}y + 1$; d) $4(y^2 + 2 + y^2)$.

★★★

15. Scrie în forma cea mai simplă:

- a) $\sqrt{4a} - 2^{-1}a + \frac{10}{4}a$;
b) $(2x - 1) - (2x - 1)$;
c) $12x + 0,8x - \sqrt{0,09}x + 1,2x$;
d) $2a^2b + 8,02a^2b - 10a^2b - 0,01a^2b$.

16. Calculează și scrie în forma cea mai simplă:

- a) $(x - 0,5)(2x^2 + 2)$; b) $(x\sqrt{2} + 1)(x\sqrt{3} - 1)$.

5. Exprimă cât mai simplu:

- a) $5x \cdot 7x$; b) $-2x^2 \cdot 8x$; c) $7y^2 \cdot 8y^4$;
d) $6xy \cdot (-4y^2)$; e) $xy \cdot 2x^2z$; f) $6x^2 \cdot (-2x^2)$.

6. Calculează:

- a) $2x + 9x - 6x$; b) $12a + a - 7a$;
c) $-2y - 9y + 13y$; d) $-5x + 3x - 9x + 11x$;
e) $6t - 4t + t - 22t$; f) $4x^2 + x^2 - 6x^2 - 2x^2$.

7. Determină valoarea numerică a expresiei algebrice $E(x) = 4x^2 - 6x + 5$, pentru:

- a) $x = 0$; b) $x = 1$; c) $x = -2$; d) $x = \sqrt{3}$.

8. Alege răspunsul corect! Pentru $x = 2\sqrt{3}$, numărul $\sqrt{3}x + x^2$ este egal cu:

- a) $6\sqrt{3}$ b) 18 c) $10\sqrt{3}$ d) 12.

12. Scrie în forma cea mai simplă:

- a) $6x - 3 + 2x + 9$;
b) $4x^2 + 4x - 3x - x^2$;
c) $\sqrt{2} + \sqrt{3}a + \sqrt{8} - \sqrt{12}a$;
d) $-3ab + c + 5c - 4ab + c$;
e) $10y^2 - 3,2y^2 + 1,6y^2$.

13. Calculează perimetrul unui triunghi dacă $\sqrt{2} + 1$, $3 - \sqrt{2}$ și 2 sunt lungimile laturilor sale.

14. Calculează perimetrul dreptunghiului ABCD dacă $AB = 3 - \sqrt{2}$ și $BC = \sqrt{2} - 1$.

17. Calculează și scrie în forma cea mai simplă:

- a) $(x + 1) \cdot (x^2 - 2) + (x - 1) \cdot (x + 2)$;
b) $(x - 1) \cdot (x^2 + 1) - (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$;
c) $2x \cdot (x^2 + 2) - x \cdot (x + 1) + x^3 - 1$;
d) $(x - 5) \cdot (x + 3) - x \cdot (x + 5) - (x - 3) \cdot (x + 5)$;
e) $\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - x(x + 1) - \frac{1}{2}(1 - 2x)$.

●●●●▷ Alege și rezolvă în 5 minute!

Calculează:

A

- a) $23x + 7x - 10x$;
b) $13b - 12b - 7b$;
c) $-32y - 19y + 13y$.

B

- a) $1,8x^2 - 3,9yx^2 + 2,6x^2$;
b) $\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}a$.

C

$E(\sqrt{2})$, dacă
 $E(x) = (2x + \sqrt{2}) + (-x + \sqrt{8})$.

●●●●▷ O situație-problemă

Un magazin de bricolaj oferă cutii de depozitare de forma unui cub. Fiecare cutie are muchia $a = 60$ cm. De asemenea, mai sunt disponibile cutii paralelipipedice cu dimensiunile $L = 80$ cm, $l = 50$ cm și $h = 40$ cm. Magazinul oferă următoarea promoție: pentru fiecare 3 cutii cubice cumpărate, se primește gratuit o cutie paralelipipedică. Dacă un client cumpără 10 cutii cubice, care este volumul total al cutiilor achiziționate?

Pentru a rezolva această problemă, avem nevoie să exprimăm convenabil volumele cutiilor în funcție de mărimile date.

Vrem să știm!

Cum efectuăm diferite operații cu numere reale exprimate prin litere?

●●●●▷ Ne amintim și extindem!

➔ 1. Cum efectuăm ridicarea la putere a numerelor reale exprimate prin litere?



- Regulile de calcul cu puteri:

Înmulțirea de puteri având aceeași bază

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a \in \mathbb{R}^*, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

Puterea unui produs

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad a, b \in \mathbb{R}^*, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Împărțirea de puteri având aceeași bază

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \quad a \in \mathbb{R}^*, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

Puterea unui cât

$$(a : b)^n = a^n : b^n, \quad a, b \in \mathbb{R}^*, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Puterea unei puteri

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \quad a \in \mathbb{R}^*, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

- Ridicarea la putere a unei expresii algebrice formate dintr-un singur termen

Tehnica de calcul

- Se ridică la acea putere coeficientul, respectând regula semnelor.
- Se ridică la acea putere fiecare literă în parte, respectând regula de ridicare la putere a unei puteri.

Exemple:

$$(2x^4y^2z)^3 = ?$$

$$(2)^3 = 8$$

$$(x^4)^3 = x^{12}$$

$$(y^2)^3 = y^6$$

$$(z)^3 = z^3$$

$$(2x^4y^2z)^3 = 8x^{12}y^6z^3$$

- Ridicarea la putere a unei expresii algebrice formate din doi sau mai mulți termeni

Tehnica de calcul

- Folosim faptul că ridicarea la putere este o înmulțire repetată.
- Aplicăm distributivitatea înmulțirii față de adunare.

Exemple:

$$(2x^4y^3 - 5xyz^2)^2 = ?$$

$$\begin{aligned} (2x^4y^3 - 5xyz^2)^2 &= (2x^4y^3 - 5xyz^2)(2x^4y^3 - 5xyz^2) = \\ &= 4x^8y^6 - 10x^5y^4z^2 - 10x^5y^4z^2 + 25x^2y^2z^4 = \\ &= 4x^8y^6 - 20x^5y^4z^2 + 25x^2y^2z^4 \end{aligned}$$

●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

Dacă un client cumpără $n = 10$ cutii cubice, numărul de cutii paralelipipedice pe care le primește gratuit este partea întreagă a împărțirii $n : 3$. Obținem 3 cutii paralelipipedice gratuite.

Volumul total al cutiilor achiziționate este $V_{\text{total}} = 10 \cdot V_{\text{cub}} + 3 \cdot V_{\text{paralelipiped}} = 10 \cdot a^3 + 3 \cdot L \cdot l \cdot h = 10a^3 + 3Llh$

Înlocuim $a = 60$ cm, $L = 80$ cm, $l = 50$ cm, $h = 40$ cm în expresia algebrică obținută. Avem

$$V_{\text{total}} = 10 \cdot 60^3 + 3 \cdot 80 \cdot 50 \cdot 40. \text{ Obținem } V_{\text{total}} = 2\,160\,000 \text{ cm}^3 + 480\,000 \text{ cm}^3 = 2\,640\,000 \text{ cm}^3.$$

Deci spațiul final de depozitare obținut de cumpărător este de $2,64$ m³.

Dacă modificăm datele numerice ale acestei probleme, putem avea același mod de rezolvare? Propune o problemă asemănătoare, care se rezolvă pe baza unei expresii algebrice similare, dar cu alți coeficienți.

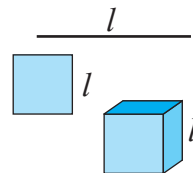
Gândim critic și constructiv!

●●●●▶ Să observăm!

Lungimile se exprimă prin unități liniare sau de gradul 1; notăm, de exemplu l .

Ariile se exprimă prin unități pătratice sau de gradul al II-lea; notăm, de exemplu l^2 .

Volumele se exprimă prin unități cubice sau de gradul al III-lea; notăm, de exemplu l^3 .



➔ 2. Cum efectuăm împărțirea a două numere reale exprimate prin litere?

- Împărțirea a două expresii algebrice formate fiecare din câte un singur termen

Tehnica de calcul

1. Împărțim coeficienții între ei, respectând regula semnelor.
2. Împărțim literele identice între ele respectând regula de împărțire a puterilor cu aceeași bază.
3. Scriem produsul final, compus dintr-un număr și partea literală.

Exemple:

$$-12x^4y^5z^4 : (2x^4y^2z^2) = ?$$

$$-12 : 2 = -6$$

$$x^4y^5z^4 : (x^4y^2z^2) = y^3z^2$$

$$-12x^4y^5z^4 : (2x^4y^2z^2) = -6y^3z^2$$

- Împărțirea unei expresii algebrice formate din mai mulți termeni la o expresie algebrică formată dintr-un singur termen

Tehnica de calcul

1. Folosim distributivitatea împărțirii față de adunare (cu anumite restricții, pe care le vom studia mai târziu)
 $(b + c) : a = b : a + c : a$
2. Distribuim fiecare termen al sumei la împărțitor, efectuăm împărțirile, apoi adunăm rezultatele parțiale.

Exemple:

$$(6x^4y^3 - 12x^5yz^2 + 9x^3yz) : (3x^3y) = ?$$

$$(6x^4y^3 - 12x^5yz^2 + 9x^3yz) : (3x^3y) =$$

$$= 6x^4y^3 : (3x^3y) - 12x^5yz^2 : (3x^3y) + 9x^3yz : (3x^3y) =$$

$$= 2xy^2 - 4x^2z^2 + 3z$$

●●●●▶ Probleme propuse

1. Calculează:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (-3) \cdot (2\sqrt{2}); & \text{e)} \left(-\frac{1}{3}\sqrt{2}\right) \cdot \left(-\frac{6}{5}\right); \\ \text{b)} (3\sqrt{2}) \cdot (-5); & \text{f)} (-0,2\sqrt{11}) \cdot 10; \\ \text{c)} (-2\sqrt{3}) \cdot (-3); & \text{g)} \left(-3\frac{1}{2}\right) \cdot (-4\sqrt{6}). \\ \text{d)} (4\sqrt{7}) \cdot (-0,5); & \end{array}$$

2. Scrie rezultatul în forma cea mai simplă:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (-2\sqrt{2}) \cdot (3\sqrt{5}); & \text{d)} 0,5\sqrt{7} \cdot (-4\sqrt{7}); \\ \text{b)} (-4\sqrt{7}) \cdot (-3\sqrt{7}); & \text{e)} -1,5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}; \\ \text{c)} 2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2}; & \text{f)} \left(-\frac{3}{4}\sqrt{6}\right) \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3}. \end{array}$$

3. Calculează:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 8 : 2,5; & \text{e)} \frac{\sqrt{2}}{3} : \frac{2}{3}; \\ \text{b)} \sqrt{8} : \sqrt{2}; & \text{f)} (-21) : 1,2; \\ \text{c)} 6a : 2; & \text{g)} 2\sqrt{8} : (-\sqrt{2}). \\ \text{d)} 9x^2 : 3; & \end{array}$$

4. Exprimă cât mai simplu:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 4ax \cdot 8by; & \text{c)} 0,25x^2 \cdot 4x^2; \\ \text{b)} (-7abc) \cdot 2ab^2; & \text{d)} \frac{1}{10}a^2 \cdot \frac{2}{5}x. \end{array}$$

5. Pentru $x = \sqrt{2}$ calculează:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{x}{3} + \frac{x}{4}; & \text{b)} \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4}; & \text{c)} \frac{x}{5} - \frac{x}{12}; & \text{d)} \frac{x}{5} : \frac{x}{12}. \end{array}$$

6. Exprimă cât mai simplu:

- a) $x^6 : x$; b) $6x^2 : (-2)$; c) $(-8x^4y^3) : (-2xy^2)$;
 d) $2x^3 : (\sqrt{2}x^2)$; e) $(3xy^2z^3) : (-xyz^2)$;
 f) $2x^3 : \left(\frac{2}{3}x\right)$; g) $(4a^5bc^2d) : \left(\frac{1}{2}a^4d\right)$.

★★

9. Calculează:

- a) $(3x^2)^3 : (9x^4)$; b) $32x^2y : (4x)^2$;
 c) $16x^4 : (-4x^2)^2$; d) $(8x^4y^2)^3 : (-8x^2y)^5$;
 e) $6a^2b^3 : (3ab^2) \cdot (-2ab)$; f) $(6x^3)^2 : (3x)^3 : x^2$.

10. Efectuează, reducând termenii asemenea:

- a) $36 - 9x + 27x + 15$;
 b) $43x - 8y + 2 - 24x + 18x - 9$;
 c) $3x^2 + 6 + 5x + (-9x^2) - 4x - 12$;
 d) $14x^2 + 7 + 3x + (-9x^2) - 6x - 15$.

★★★

13. Raționalizează numitorii, după ce ai făcut simplificările necesare:

- a) $\frac{-7\sqrt{13}}{\sqrt{26}}$; b) $\frac{-5x\sqrt{23}}{\sqrt{46}}$; c) $\frac{4\sqrt{10}}{-\sqrt{24}}$;
 d) $\frac{15a^2}{2\sqrt{60}}$; e) $\frac{6\sqrt{56}}{5\sqrt{42}}$; f) $\frac{5x\sqrt{72}}{6\sqrt{30}}$.

14. Scrie ca expresie algebrică:

- a) aria unui cerc de rază r ;
 b) aria unui romb de latură l , cu un unghi de 60° ;
 c) înălțimea unui triunghi echilateral de latură a ;
 d) distanța parcursă de un automobil care se deplasează timp de x ore cu viteza de 60 km/h;
 e) distanța parcursă de un biciclist care merge x minute cu 6 km/h și y minute cu 8 km/h.

7. Calculează:

- a) $(x+3)(x+2)$; b) $(x-1)(x+4)$;
 c) $(x+1)(x-6)$; d) $(x-2)(x-5)$.

8. Exprimă cât mai simplu: a) $(2x)^2$; b) $(-3xy)^3$;

- c) $(\sqrt{2}x^2yz^3)^4$; d) $(-0,1 \cdot xy^2)^4$.

11. Calculează:

- a) $(x^3 - 3x^2 - 2x) : x$;
 b) $(12x^6 + 16x^5 - 8x^3) : (4x^3)$;
 c) $(6xy^2 - 2x^2y - 4xy) : (2xy)$;
 d) $(9x^3y^4 - 6xy^3 - 3y^2) : (3y^2)$;
 e) $(15x^3y^2 - 20x^3y) : (5x^3y)$;
 f) $(2xyz^3 + 8x^2z - 10z^2) : (2z)$.

12. Raționalizează numitorii:

- a) $\frac{3}{\sqrt{5}}$; b) $-\frac{7}{\sqrt{7}}$; c) $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$; d) $\frac{3\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$.

15. Calculează $(x+y) \cdot 2$ și $(x+y+z) \cdot 3$ pentru:

- a) $x = 3\sqrt{2} + \sqrt{3}$ b) $x = 6(\sqrt{5} + 1)$
 $y = 3\sqrt{2} - \sqrt{3}$ $y = 6(\sqrt{5} - 1)$
 $z = 9\sqrt{2}$ $z = -3\sqrt{5}$.



16. Efectuează și scrie în forma cea mai simplă:

- a) $(1-x+3x^2)(4-x)$;
 b) $(x^3-1)(x^3+1)$;
 c) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$;
 d) $100xy^2 \cdot \left(0,12x + \frac{1}{4}y + \frac{3}{25}\right)$;
 e) $\frac{2\sqrt{3}}{5}x \cdot (5\sqrt{3}x^2 - \sqrt{12}x - \sqrt{27})$;
 f) $2x \cdot \left[3xy \left(-\frac{1}{12}x^2y\right)\right]$.

●●●●▷ Alege și rezolvă în 5 minute!

Calculează:

A

- a) $2(xy) \cdot (7x)$;
 b) $(3abc) : (ab)$;
 c) $(-3yz^2)^2$.

B

- a) $2(x^2) \cdot (-3yx^2) \cdot y$;
 b) $(2ab^4c) : (-3ab^2)$;
 c) $(-3\sqrt{2}xyz^3)^4$.

C

$$(2x + \sqrt{2})(-x + \sqrt{8})$$

► O situație-problemă

Un fermier are 50 de metri de gard pe care dorește să-l folosească pentru a construi o grădină pe terenul său de formă dreptunghiulară. Care ar trebui să fie dimensiunile grădinii astfel încât aria acesteia să fie maximă?

Vrem să știm! Cum optimizăm calculele cu numere reale exprimate prin litere?

Pentru a ști cum optimizăm calculele, este important să înțelegem **legăturile dintre operații**.

► Să comparăm

1. Ce legătură există între adunarea și înmulțirea numerelor reale?

Înmulțirea se obține prin **adunarea repetată** a unor termeni egali.

Pentru $a \in \mathbb{R}$ definim

$$\underbrace{a + a + a + \dots + a}_{n \text{ termeni}} = n \cdot a$$

3. Ce legătură există între adunarea și scăderea numerelor reale?

Adunarea și scăderea sunt **operații inverse** una alteia.

$$a \xrightarrow{+b} a+b \xrightarrow{-b} a$$

Pentru a efectua scăderea a două numere reale adunăm primul număr cu **opusul** celui de-al doilea.

Exemplu:

$$5\sqrt{3} - (-2\sqrt{3}) = 5\sqrt{3} + (+2\sqrt{3}) = 7\sqrt{3}$$

2. Ce legătură există între înmulțirea și ridicarea la putere a numerelor reale?

Ridicarea la putere se obține prin **înmulțirea repetată** a unor factori egali.

Pentru $a \in \mathbb{R}^*$ definim $a^0 = 1$, $a^1 = a$,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

4. Ce legătură există între înmulțirea și împărțirea numerelor reale?

Înmulțirea și împărțirea la un număr real nenul sunt **operații inverse** una alteia.

$$a \xrightarrow{\times b} a \cdot b \xrightarrow{:b} a, b \neq 0$$

Pentru a efectua împărțirea a două numere reale înmulțim primul număr cu **inversul** celui de-al doilea.

Exemplu:

$$\left(-\frac{10}{3}\sqrt{6}\right) : \frac{8\sqrt{2}}{5} = -\frac{10\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{5}{8\sqrt{2}} = -\frac{25}{12}\sqrt{3}$$

► Rezolvăm situația-problemă

Notăm lățimea viitoarei grădini cu x și lungimea acesteia cu y . Perimetrul dreptunghiului este $P = 2(x + y)$.

Din datele problemei, avem $2(x + y) = 50$. Obținem că $x + y = 25$.

Exprimăm y în funcție de x și obținem $y = 25 - x$.

Exprimăm aria grădinii: $A(x) = x \cdot y = x(25 - x) = 25x - x^2 = -x^2 + 25x$

Dăm diferite valori lui x pentru a vedea cum variază aria. Obținem:

Dacă $x = 5$ m, avem $A(5) = 100 \text{ m}^2$

Dacă $x = 10$ m, avem $A(10) = 150 \text{ m}^2$

Dacă $x = 12,5$ m (caz în care $x = y$), avem $A(12,5) = 156,25 \text{ m}^2$

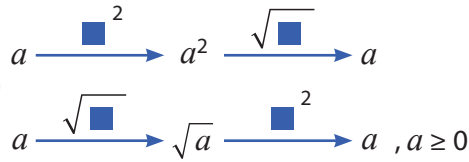
Dacă $x = 15$ m, avem $A(15) = 150 \text{ m}^2$

Dacă $x = 20$ m, avem $A(20) = 100 \text{ m}^2$

Prin încercări, am observat că aria maximă a fost obținută când $x = 12,5$ m și $y = 12,5$ m, adică atunci când lungimea și lățimea sunt egale. Rezultă că grădina dorită ar trebui să aibă formă de pătrat.

5. Ce legătură există între ridicarea la pătrat și extragerea radicalului în mulțimea numerelor reale?

Pentru numere reale pozitive, ridicarea la pătrat și extragerea radicalului sunt **operații inverse** una alteia.



Exemple: $2^2 = 4$ $3^2 = 9$ $4^2 = 16$
 $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$ $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$ $\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$

6. Care sunt regulile de calcul cu puteri și radicali?

Puteri

$$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2; (a : b)^2 = a^2 : b^2; a, b \in \mathbb{R}; b \neq 0$$

Exemple:

$$5^2 \cdot 2^2 = (5 \cdot 2)^2 = 10^2 = 100$$

Atenție!

$$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$$

$$(a - b)^2 \neq a^2 - b^2$$

Exemple:

$$(2 + 3)^2 = 5^2 = 25, \text{ dar } 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

$$(2 - 3)^2 = (-1)^2 = 1, \text{ dar } 2^2 - 3^2 = 4 - 9 = -5$$

Radicali

$$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}; \sqrt{x : y} = \sqrt{x} : \sqrt{y}; x \geq 0, y > 0$$

Exemple:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

Atenție!

$$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a - b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

Exemple:

$$\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}, \text{ dar } \sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$$

$$\sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}, \text{ dar } \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$$

Rezumând cele de mai sus, obținem sinteza care urmează.

Scăderea este *adunarea descăzutului cu opusul scăzătorului*.

Adunarea și scăderea sunt operații de ordinul I.

Înmulțirea este o *adunare repetată*.

Împărțirea este *înmulțirea deîmpărțitului cu inversul împărțitorului*.

Înmulțirea și împărțirea sunt operații de ordinul al II-lea.

Ridicarea la putere este o *înmulțire repetată*.

Extragerea rădăcinii pătate este *operația inversă ridicării la pătrat, pentru numere pozitive*.

Ridicarea la putere și extragerea radicalului sunt operații de ordinul al III-lea.

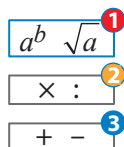
Analizează schema de mai sus și propune câte un exemplu numeric sau algebric pentru a ilustra fiecare afirmație.

Gândim critic și constructiv!



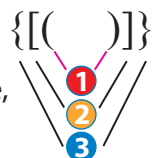
7. Care sunt regulile de prioritate în calcul?

- 1 În exercițiile fără paranteze: se efectuează întâi ridicările la putere și extragerea radicalilor, apoi înmulțirile și împărțirile, iar în final adunările și scăderile.



Aceste reguli de prioritate se aplică și în calculul algebric.

- 2 Parantezele schimbă prioritățile în calcul! Se efectuează întâi calculele din parantezele rotunde, apoi cele din parantezele drepte și în final cele din acolade.



●●●●▷ Problemă rezolvată

Calculează și scrie în forma cea mai simplă expresia $[2x - y - (x + 2y)] \cdot [3x - 2y - (2x - 3y)]$.

Rezolvare:

Cum gândim	Cum scriem
Efectuăm operațiile din paranteze și transformăm parantezele. Ținem cont că semnul minus din fața parantezei schimbă semnul numerelor din paranteză.	$[2x - y - (x + 2y)] \cdot [3x - 2y - (2x - 3y)] =$ $= (2x - y - x - 2y) \cdot (3x - 2y - 2x + 3y) =$
Identificăm și reducem termenii asemenea. Efectuăm înmulțirile, ținând cont de distributivitate.	$= (\underline{2x} - \underline{y} - \underline{x} - \underline{2y}) \cdot (\underline{3x} - \underline{2y} - \underline{2x} + \underline{3y}) =$ $= (x - 3y) \cdot (x + y) =$
Identificăm și reducem termenii asemenea.	$= x^2 + xy - 3xy - 3y^2 =$ $= x^2 - 2xy - 3y^2$

●●●●▷ Probleme propuse

★

1. Scrie în forma cea mai simplă:

- a) $35 - 7x + 28x + 14$;
b) $45x - 9y + 3 - 15x + 9x - 7$;
c) $3(x - 2) - 4(2x + 3)$; d) $7(8 - 5x) + 3(x - 1)$;
e) $-5x(2 - x) - 2x(5 - x)$.

2. Scrie în forma cea mai simplă:

- a) $-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{3}x - 5\right) + \frac{2}{5}\left(2x - \frac{5}{4}\right)$;
b) $0,3(2x - 7) + 0,2(3 + 0,2x)$.

3. Scrie în forma cea mai simplă:

- a) $7 - (2a + 5)$;
b) $(4x + 5y) - (5x - 4y)$;
c) $3 - (x^2 + \sqrt{2}x) + (\sqrt{8}x - 2x^2)$;
d) $(x^2 + 4x - 5) - (2x^2 + 5x - 1)$;
e) $\frac{5}{12} - \left(\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{7}{3}\right)$;
f) $(0,1x^2 + 2,4x - 1,5) - (2,03x^2 + 5x)$.

★★

4. Calculează și scrie în forma cea mai simplă:

- a) $(3x - 1)(x + 2)$; f) $(ab + 4)(1 - ab)$;
b) $(4x + 3)(1 - x)$; g) $(2z + 4)(1 - 3z)$;
c) $(y + 1)(y^2 - 1)$; h) $(3y + 4)(1 - 5y)$;
d) $(2a + 1)(2a - 1)$; i) $(3a - b)(b - a)$;
e) $(b + 2)(b + 9)$; j) $(x - 2)(9x - 3)$.

5. Scrie în forma cea mai simplă:

- a) $(5x - 1)(x^2 - 3x + 2)$;
b) $(1 - x + 3x^2)(2x - 1)$;
c) $(3 - x + 2x^2)(3x - 2)$;
d) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$;
e) $(x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 3)$.

★★★

6. Efectuează, aducând expresiile algebrice următoare la o formă mai simplă:

- a) $2x(x - 1) + x^2(x - 2) - 3$
b) $(x + 3) \cdot x \cdot 2\sqrt{2} - (2x - 1) \cdot x \cdot \sqrt{2} + x^2$
c) $2ab(a + b) + (a - b) \cdot 2ab - 4a^2b^2$
d) $(2x + 3) \cdot x \cdot 2\sqrt{2} - (2x - 1) \cdot x^2 \cdot \sqrt{2} - x^2$.

7. a) Demonstrează că există $m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$(3 + 5\sqrt{2})(7 - 10\sqrt{2}) = m + n\sqrt{2}.$$



b) Determină $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a + b\sqrt{2} \in [0; 0,5]$.

c) Arată că există $m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $m + n\sqrt{2} \in [0; 0,000001]$.

●●●●▷ Alege și rezolvă în 5 minute!

Efectuează, scriind rezultatul în forma cea mai simplă:

A

- a) $36 - 9x + 27x + 15$;
b) $43x - 8y + 2 - 24x + 18x - 9$.

B

- a) $(5x - 1)(x^2 - 2x + 3)$;
b) $(1 - x + 3x^2)(4 - x)$.

C

- a) $2x(x - 1) + x^2(x - 2) - 3$;
b) $(3 - x) \cdot x \cdot 2\sqrt{2} + (2x - 3) \cdot x \sqrt{2} + x^2$.

O situație-problemă

Folosirea internetului ne permite accesul la multă informație nestructurată.

De aceea, a devenit foarte util:

- să știm **să alegem** ce e important și
- să sesizăm rapid **esențialul** dintr-un set de date.

Calculul algebric ne ajută să ne dezvoltăm aceste competențe.

Vrem să știm!

Cum exprimăm cât mai scurt și rapid rezultatele unor calcule cu litere?

➔ Cum exprimăm rapid, în forma cea mai simplă, pătratul unui binom?

Demonstrăm

Pentru a exprima pătratul unui binom:

Calculăm algebric

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) = \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 = \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

Calculăm algebric

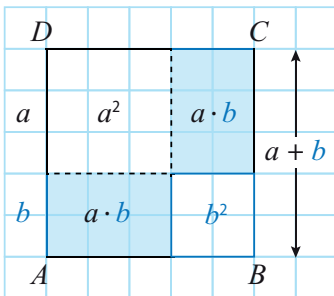
$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= (a - b)(a - b) = \\ &= a^2 - ab - ba + b^2 = \\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

Interpretăm geometric

Scriem în două moduri aria dreptunghiului $ABCD$.

$$A_{ABCD} = (a + b)^2$$

$$A_{ABCD} = a^2 + 2ab + b^2$$

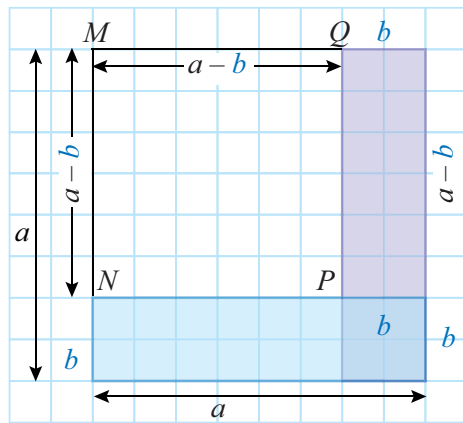


Interpretăm geometric

Scriem în două moduri aria dreptunghiului $MNPQ$.

$$A_{MNPQ} = (a - b)^2$$

$$A_{MNPQ} = a^2 - 2ab + b^2$$



Exprimare orală

Explică în cuvinte, cât mai clar, justificarea formulelor prin reprezentare geometrică.



În acest mod am demonstrat algebric și am ilustrat geometric formulele referitoare la **dezvoltarea pătratului unui binom**:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Aceste formule ne permit să efectuăm rapid calcule aritmetice și algebrice.

Evaluăm nivelul de bază

Calculează: **a)** 101^2 ; **b)** 31^2 ; **c)** $(2a + 3b)^2$; **d)** $(5ab - 7)^2$; **e)** $(3abc - 11d)^2$.

●●●●▷ **Exerciții rezolvate**

1. Dezvoltă pătratele: $(x + 3)^2$; $(c - 5)^2$. 2. Calculează rapid: 598^2 . 3. Efectuează: $(7a^4 + 5ab^3)^2$.

Rezolvări:

1. $(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$; $(c - 5)^2 = c^2 - 2 \cdot c \cdot 5 + 5^2 = c^2 - 10c + 25$.
 2. $598^2 = (600 - 2)^2 = 600^2 - 2 \cdot 600 \cdot 2 + 2^2 = 360\,000 - 2\,400 + 4 = 357\,604$.
 3. $(7a^4 + 5ab^3)^2 = (7a^4)^2 + 2 \cdot 7a^4 \cdot 5ab^3 + (5ab^3)^2 = 49a^8 + 70a^5b^3 + 25a^2b^6$.

●●●●▷ **Probleme propuse**

- ★
1. Efectuează înmulțirile:
a) $(3x + 2y)(4x + 5y)$; **b)** $(6x + 4y)(3x + y)$;
c) $(7x - 4)^2$; **d)** $(4x + 3)^2$.
2. Calculează:
a) $(2 + \sqrt{3})^2$; **b)** $(1 + \sqrt{2})^2$; **c)** $(\sqrt{5} + 2)^2$;
d) $(2\sqrt{3} + 1)^2$; **e)** $(\sqrt{3} - 2)^2$; **f)** $(2 - \sqrt{2})^2$.
3. Dezvoltă aplicând formulele de calcul prescurtat:
a) $(x + 2y)^2$; **b)** $(y + x)^2$; **c)** $(a + 0,7)^2$;
d) $(3 + y)^2$; **e)** $(2,5 - 2y)^2$; **f)** $(1,6 + b)^2$;
g) $(3 - y)^2$; **h)** $(2 - 3z)^2$; **i)** $(4a + b)^2$;
j) $(\sqrt{2} + y)^2$; **k)** $(2\sqrt{3} - 2y)^2$; **l)** $(\sqrt{6} + b)^2$.
- ★★
4. Completează spațiile punctate pentru a obține pătratul unui binom:
a) $9 + \dots + x^2 = (3 + x)^2$; **e)** $25a^2 - \dots + 4$;
b) $\dots + 2a + a^2 = (1 + a)^2$; **f)** $x^2 + x + \dots$;
c) $b^2 + 4ab + \dots$; **g)** $a^2 + 4b^2 - \dots$;
d) $\dots - 6a + 9$; **h)** $\dots - 8c + c^2$.
5. Scrie sub forma unui pătrat:
a) $3 + 2\sqrt{2}$; **b)** $3 - 2\sqrt{2}$; **c)** $27 + 10\sqrt{2}$;
d) $9 - 2\sqrt{14}$; **e)** $21 + 8\sqrt{5}$; **f)** $15 + 2\sqrt{14}$;
g) $3 - 2\sqrt{3}a + a^2$; **h)** $11 + 6\sqrt{2}$; **i)** $5 + 2\sqrt{6}$;
j) $2y\sqrt{2} + y^2 + 2$; **k)** $2\sqrt{15} + 8$; **l)** $4\sqrt{6} + 14$.

- ★★★
6. Arată că, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, următoarele numere sunt pozitive.

Exemplu:

$$a^2 + 4a + 7 = a^2 + 4a + 4 + 3 = (a + 2)^2 + 3.$$

Cum $(a + 2)^2 \geq 0$, atunci $(a + 2)^2 + 3 > 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

- a)** $a^2 + 2a + 3$; **c)** $a^2 - 4a + 5$; **e)** $a^2 + a + 1$; **g)** $6a + 11 + a^2$;
b) $a^2 + 6a + 10$; **d)** $a^2 - a + 1$; **f)** $4a^2 + 4a + 2$; **h)** $\frac{5}{4} + 2a + a^2$.
7. Demonstrează că, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^*$, avem $a^2 + 9 \geq 6a$; $4a \leq a^2 + 4$; $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$.

- ★★★★
8. Pentru $x \in \mathbb{R}^*$, calculează $x^2 + \frac{1}{x^2}$ știind că: **a)** $x + \frac{1}{x} = 3$; **b)** $x - \frac{1}{x} = 6$; **c)** $x^4 + \frac{1}{x^4} = 6$.
9. Arată că expresiile următoare reprezintă pătratele unor alte expresii algebrice.

Exemplu:

În $(x^4 - 3x^2 + 1)(x^4 - 3x^2 + 3) + 1$ notăm $x^4 - 3x^2 + 1 = a$ și obținem $a(a + 2) + 1 = (a + 1)^2$.
 Pătratul căutat este $(x^4 - 3x^2 + 2)^2$.

- a)** $(x^3 + x^2 + x)(x^3 + x^2 + x + 2) + 1$; **c)** $(x^4 + x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 3) + 1$;
b) $(3x - x^2)(3x - x^2 + 6) + 9$; **d)** $(x^3 - x^2 + 2)(x^3 - x^2 + 10) + 16$.

●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A

Dezvoltă aplicând formulele de calcul prescurtat:
 $(a + y)^2$; $(1 + 2x)^2$; $(1 - x)^2$.

B

Determină aria unui triunghi care are o înălțime și latura corespunzătoare ei egale cu $(9 - 4\sqrt{2})$ cm.

C

Demonstrează că pătratul oricărui număr natural impar, divizibil cu 5 are cifra zecilor 2.

●●●●▷ O situație-problemă

Avem un pătrat cu latura de lungime a , cu $a > 2m$ și un dreptunghi care are lungimea cu $2m$ mai mare decât latura pătratului, iar lățimea cu $2m$ mai mică decât latura pătratului. Care dintre cele două figuri geometrice are aria mai mare?

Vrem să știm!

Cum prescurtăm modul de calcul pentru produsul dintre suma și diferența acelorași termeni?

➔ 1. Cum exprimăm rapid, în forma cea mai simplă, produsul de sumă prin diferență?

●●●●▷ Demonstrăm

Algebric

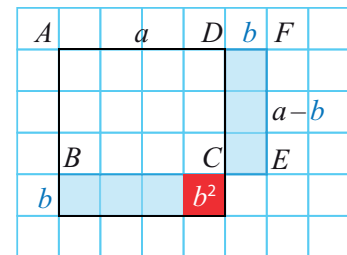
Geometric

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - b^2$$

Exprimăm în două moduri aria dreptunghiului $ABEF$.

$$A_{ABEF} = (a + b)(a - b)$$

$$A_{ABEF} = a^2 - b^2$$



În acest mod am demonstrat algebric și am ilustrat geometric formula **produsului dintre sumă și diferență**:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Această formulă ne permite să efectuăm rapid calcule aritmetice și algebrice.

●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

Aria pătratului este a^2 .

Aria dreptunghiului este $(a + 2)(a - 2) = a^2 - 4$, deci este mai mică decât aria pătratului.

●●●●▷ Exprimare orală

Observă desenul și relatează cât mai clar cum justificăm formula $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ prin reprezentare geometrică.

●●●●▷ Exerciții rezolvate

1. Calculează: $(x - 3)(x + 3)$; $(2y - 1)(2y + 1)$.

2. Calculează rapid: $197 \cdot 203$.

3. Exprimă mai simplu: $(3a^4 + 5ab^6)(3a^4 - 5ab^6)$.

Rezolvări:

1. $(x - 3)(x + 3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$; $(2y - 1)(2y + 1) = (2y)^2 - 1^2 = 4y^2 - 1$

2. $197 \cdot 203 = (200 - 3)(200 + 3) = 200^2 - 3^2 = 40\,000 - 9 = 39\,991$.

3. $(3a^4 + 5ab^6)(3a^4 - 5ab^6) = (3a^4)^2 - (5ab^6)^2 = 9a^8 - 25a^2b^{12}$.

●●●●▷ Evaluăm nivelul de bază

Calculează: a) $101 \cdot 99$; b) $29 \cdot 31$; c) $x^2 - 25$; d) $4x^2 - 81$.

●●●●► **Probleme propuse**

★

1. Efectuează înmulțirile:

a) $(3 - 2x)(5 - x)$; **b)** $(6x - 8)(1 - x)$; **c)** $(2 - x)(2 + x)$; **d)** $(3 + 2y)(3 - 2y)$.

2. Dezvoltă aplicând formulele de calcul prescurtat:

a) $(3 - \sqrt{3})^2$; **b)** $(4a - 3b)^2$; **c)** $(c - 0,5a)^2$; **d)** $(\sqrt{2}a - b)(\sqrt{2}a + b)$; **e)** $(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})$;
f) $(3\sqrt{2} - 1)^2$; **g)** $(2a - 5b)^2$; **h)** $(x + 2y)(x - 2y)$; **i)** $(3b - c)(c + 3b)$; **j)** $(3\sqrt{2} - 1)(3\sqrt{2} + 1)$.

3. Calculează:

a) aria unui dreptunghi cu lungimea $2 + \sqrt{3}$ metri și lățimea $2 - \sqrt{3}$ metri;
b) aria unui romb ale cărui diagonale au lungimile $7 - 2\sqrt{3}$ metri și $7 + 2\sqrt{3}$ metri.

★★

4. Folosește asociativitatea și comutativitatea înmulțirii pentru a calcula cât mai simplu și rapid:

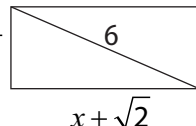
Exemplu:

$$(\sqrt{5} - 1)(2\sqrt{2} + 3)(1 + \sqrt{5})(3 - 2\sqrt{2}) = (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = (5 - 1)(9 - 8) = 4.$$

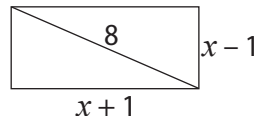
a) $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)$; **b)** $(3 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 3)(2\sqrt{2} - 1)$; **c)** $(x - 2y)(x^2 + 4y^2)(x + 2y)$;
d) $(a - 3b)(a^2 + 9b^2)(a + 3b)$; **e)** $(2a + b)(b^2 + 4a^2)(2a - b)$.

5. Determină ariile dreptunghiurilor, știind că dimensiunile sunt date în centimetri.

a) $x - \sqrt{2}$



b)

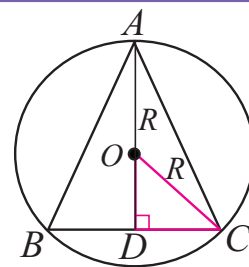


6. Calculează media geometrică a numerelor a și b unde: **a)** $a = 5 - \sqrt{2}$ și $b = 5 + \sqrt{2}$;
b) $a = 4 - 2\sqrt{3}$ și $b = 2\sqrt{3} + 4$; **c)** $a = 5 - \sqrt{14}$ și $b = 5 + \sqrt{14}$.

★★★

7. Mati le-a explicat colegilor săi că pot calcula pătratele unor numere de forma $\overline{a5}$ astfel: Calculăm $x = a(a + 1)$ și scriem numărul $\overline{x25}$. De exemplu, pentru a calcula 75^2 determinăm $x = 7 \cdot 8 = 56$ și scriem $75^2 = 5625$. Explică de ce metoda descrisă de Mati este corectă.

8. În figura alăturată triunghiul isoscel ABC este înscris în cercul de rază R . Știind că $AD = 8$ cm și $BC = 12$ cm, calculează raza cercului circumscris, folosind teorema lui Pitagora în triunghiul COD .



9. Calculează în două moduri:

a) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$; **b)** $(x + y - 2)(x + y + 2)$; **c)** $(a - b + 3)(a + b + 3)$; **d)** $(2x - 1 + z)(2x - z - 1)$.

10. Calculează: **a)** $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1)(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1)$; **b)** $(\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1)(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1)$;

c) $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + 1) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - 1)$; **d)** $(\sqrt{2} - \sqrt{6} + \sqrt{12} + 1) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{12} + 1)$.

11. Arată că $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1) = x^{16} - 1$.

12. Arată că numărul $A = (2n^2 + n + 1)^2 - (2n^2 - n - 1)^2$ este divizibil cu 8, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

●●●●► **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A

Efectuează: **a)** $(x - y)(x + y)$;
b) $(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})$.

B

Calculează media aritmetică și media geometrică a numerelor $\sqrt{2} - 1$ și $\sqrt{2} + 1$.

C

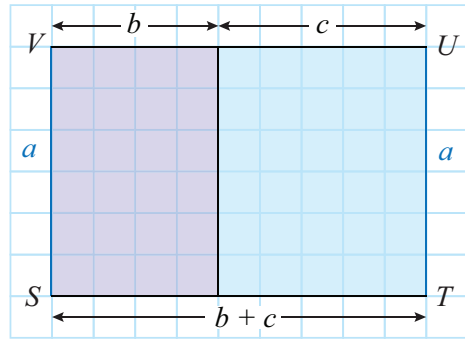
Calculează aria unui paralelogram $ABCD$ cu $AB = \sqrt{15} - \sqrt{13}$, $AD = \sqrt{15} + \sqrt{13}$ și unghiul B cu măsura de 135° .

●●●●▷ O situație-problemă

Tatăl Lizei vrea să cumpere același tip de gresie pentru bucătăria și sufrageria care au forma redată în schița alăturată. Pentru aceasta, el a măsurat dimensiunile fiecărei camere și a obținut $a = 6$ m, $b = 3,5$ m și $c = 4,5$ m. El a făcut rapid următorul calcul: $A_{STUV} = 6 \cdot 3,5 + 6 \cdot 4,5 = 6(3,5 + 4,5) = 6 \cdot 8 = 48$ (m²)
A procedat corect?

Vrem să știm!

Cum descompunem sumele în produse pentru a putea calcula rapid?



●●●●▷ Ne amintim și extindem!

Figura ilustrează geometric **distributivitatea** înmulțirii față de adunare. Distributivitatea înmulțirii ne permite să scoatem **factor comun**.

$$ab + ac = a(b + c) \quad \underbrace{ab}_{\text{sumă}} + \underbrace{ac}_{\text{produs}} = a \cdot \underbrace{(b + c)}_{\text{produs}}$$

Pentru a face descompuneri în factori, utilizăm următoarele **tehnici de lucru**:

Tehnica de lucru

Dacă într-o sumă, mai mulți termeni apar înmulțiți cu același monom, acela se poate da **factor comun**.

Suma se transformă astfel într-un produs.

Se poate da factor comun în mai multe etape, pentru a realiza o **descompunere în factori**.

Adesea se dovedește util să punem în evidență **factorul comun (-1)** pentru a putea continua calculele.

Exemple:

$$8xy + 12ab = 4 \cdot 2xy + 4 \cdot 3ab = 4(2xy + 3ab)$$

$$21a^4x - 28a^3x^3y = 7a^3x \cdot 3 - (7a^3x) \cdot (4x^2y) = 7a^3x(3 - 4x^2y)$$

$$a^2 + a = a \cdot a + a \cdot 1 = a(a + 1)$$

$$\begin{aligned} 3ax - 7ay + 6bx - 14by &= a(3x - 7y) + b(6x - 14y) = \\ &= a(3x - 7y) + 2b(3x - 7y) = \\ &= (3x - 7y)(a + 2b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(a - b) + y(b - a) &= x(a - b) + y \cdot (-1) \cdot (a - b) = \\ &= x(a - b) - y(a - b) = (a - b) \cdot (x - y) \end{aligned}$$

●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

Folosind notațiile din figură, avem $ab + ac = a(b + c)$. Deci tatăl Lizei a procedat corect.

●●●●▷ Exercițiu rezolvat

Descompune în factori expresia algebrică $E(a, b, c) = abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1$.

Rezolvare:

Cum gândim	Cum redactăm
Grupăm doi câte doi termenii expresiei algebrice și apoi aplicăm factorul comun pentru fiecare pereche potrivită:	$E(a, b, c) = abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1 = ab(c + 1) + a(c + 1) + b(c + 1) + (c + 1)$
Observăm că se poate da factor comun paranteza $c + 1$ și obținem:	$E(a, b, c) = (c + 1)(ab + a + b + 1)$
În cea de a doua paranteză grupăm primii doi termeni și ultimii doi și aplicăm factorul comun pentru fiecare pereche de termeni:	$E(a, b, c) = (c + 1)[a(b + 1) + (b + 1)]$
În paranteza dreaptă se poate da factor comun $b + 1$ și obținem:	$E(a, b, c) = (c + 1)(b + 1)(a + 1).$

●●●●▷ **Evaluăm nivelul de bază**

1. Scoate factor comun: **a)** $3x - 3y$; **b)** $ax + ay$; **c)** $11z^3 + 2z^2$; **d)** $4xz - 7zy$.
 2. Descompune în factori: **a)** $3x(2 - y) + 4y(2 - y)$; **b)** $3ab - 3bc + 4a^2 - 4ac$.

●●●●▷ **Probleme propuse**

- ★
1. Descompune prin scoaterea factorului comun 2: **3.** Descompune scoțând factor comun:
- | | | | |
|-----------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $2x + 2y$; | e) $2a - 2b$; | a) $3x + 3y$; | i) $a^2 - ab$; |
| b) $6a - 6b - 6c$; | f) $4x^2 + 8xy$; | b) $2\sqrt{2}a - 4b$; | j) $3x + 6x^2 - 12$; |
| c) $6x - 4y$; | g) $12x^3 - 8x + 4y$; | c) $x^2 + x^3$; | k) $x^4 + x^2 - x$; |
| d) $4x + 6x^2$; | h) $0,4a - 1,2b$. | d) $12 - 12y$; | l) $ay^2 + az - ax$; |
| | | e) $3\sqrt{2}x - 3\sqrt{6}y$; | m) $6a - 6b - 6c$; |
| 2. Scoate factor comun $-3x$: | | f) $x^3 - x^2 + x$; | n) $2x^4 - 4x^2 + 12x$; |
| a) $6x^2 - 12x$; | d) $12x^4 + 45x^3 - 18x^2$; | g) $a^3 - 2a^2$; | o) $11x - 22$; |
| b) $15x^2 - 27x$; | e) $-3x^3 - 24x + 21x^2$; | h) $0,5p + 0,5q$; | p) $3\sqrt{2}a + \sqrt{2}b$. |
| c) $30x^2 - 12x^3 - 15x$; | f) $-60x^4 + 36x^2 - 18x$. | | |
- ★★
4. Descompune în produse expresiile următoare:
- | | | |
|----------------------------|---|--|
| a) $5x - 10y$; | e) $ax - ay + bx - by$; | i) $(x + 2)(x + 3) + (x + 2)(x - 4)$; |
| b) $3ax - 12a$; | f) $4x^2 - 8x - 3xy + 6y$; | j) $(2x - 1)(5 - x) + (2x - 1)(2x - 6)$; |
| c) $12 - 4x$; | g) $x^3 + 2ax^2 + a^2x + 2a^3$; | k) $(x - 7)(3x - 1) - (x - 7)(3x + 1)$; |
| d) $25x^2 - 0,5x$; | h) $x^3 - 5x^2 + 2x - 10$; | l) $a(x - 2) + x(2 - x) - 6 + 3x$. |
5. Scrie sub formă de produs:
- | | | |
|-----------------------------------|---|---|
| a) $x^3y + xy^3$; | e) $x(x + \sqrt{2}) - y(x + \sqrt{2})$; | i) $a(x - 3) - (x - 3)b + (x - 3)c$; |
| b) $xa + xb$; | f) $3(x - y)^2 + 9x^2(x - y)^2$; | j) $m(x + a) - p(x + a) + q(x + a)$; |
| c) $a(x + 1) + b(x + 1)$; | g) $a(x - 1) - (x - 1)b$; | k) $2(x - \sqrt{5}) - 3(x - \sqrt{5}) + 7(x - \sqrt{5})$; |
| d) $(a - b)t - (a - b)x$; | h) $a(x - 1)^2 + 4b(x - 1)^2$; | l) $x(x - 2y) + 3(2y - x) - x + 2y$. |
6. Scrie sub formă de produs:
- | | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|--|
| a) $(x + y)a + b(x + y)$; | d) $2x(x - y) + 3y(x - y)$; | g) $a^2(a + b) + b^2(a + b)$; |
| b) $(x + y)^2 - (x + y)$; | e) $x(x + 1) - 2(x + 1)$; | h) $(a - 2)x - (a - 2)y + a - 2$; |
| c) $4(x - 2)^2 - 2(x - 2)$; | f) $x(x - 1)^2 - 2x(x - 1)$; | i) $(3x - 2y)(2x + 5y) - (x - 3y)(2x + 5y)$. |
- ★★★
7. Descompune asociind convenabil termenii și scoțând factor comun.



Exemplu: $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = x^2(x + y) + y^2(x + y) = (x + y)(x^2 + y^2)$.

- a)** $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$; **c)** $x^2 - 2ax + xy - 2ay$; **e)** $xz + xt + yz + yt$; **g)** $ab - b^2 + ax - bx$;
b) $m^3 - 3m^2 + 3m - 9$; **d)** $3x + xy - 3y - y^2$; **f)** $p^5 - p^4 + 3p^3 - 3p^2$; **h)** $a^4 - a^3b + a^2 - 2a - ab + 2b$.
8. Descompune în factori, după ce ai scris unul dintre termeni ca sumă de alți doi termeni.

Exemplu: $x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 = x(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x + 3)$.

- | | | | | |
|-----------------------------|----------------------------|-----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| a) $x^2 + 8x + 12$; | b) $y^2 - 5y + 6$; | c) $z^2 + 7z + 12$; | d) $a^2 + 3a + 2$; | e) $t^2 - 5t - 6$; |
| f) $x^2 + 8x + 15$; | g) $y^2 - y - 6$; | h) $z^2 + 4z + 3$; | i) $z^2 + 9z + 8$; | j) $x^2 + 9x + 20$. |

●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A

Scoate factor comun:

- a)** $x^3 - x^2y$; **b)** $6x^2 - 3xy$.

B

Descompune în factori:

- a)** $x(y - 2) - y + 2$; **b)** $2y(x + 1) - 2x - 2$.

C

Descompune în factori:

- a)** $x^2 - 5x - 14$; **b)** $y^2 + 20y + 99$.

O situație-problemă

Elevii din Școala Gimnazială nr. 3 au donat bani pentru ajutorarea unui cămin de bătrâni. În clasa a VIII-a A sunt 26 de elevi care au dat câte 26 lei fiecare, în clasele a VIII-a B și a VIII-a C, câte 26 de elevi au dat 24 lei fiecare, iar cei 24 de elevi din clasa a VIII-a D au dat 24 lei fiecare. Cum putem afla rapid ce sumă de bani s-a adunat?

Vrem să știm! Cum descompunem sumele în produse pentru a calcula rapid?

Generalizăm

O notare prescurtată ne ajută să observăm că, în rezolvare, apare o formulă de tipul $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

Pentru a evidenția produse, utilizăm formulele de **restrângere a pătratului unui binom** și formula de **descompunere a diferenței de pătrate**

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Exemple:

$$7^2 + 2 \cdot 7 \cdot 6 + 6^2 = (7 + 6)^2 = 13^2 = 169$$

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 = (x - 3)^2$$

$$32^2 - 28^2 = (32 - 28)(32 + 28) = 240$$

$$441x^2 - 841y^2 = (21x)^2 - (29y)^2 = (21x - 29y)(21x + 29y)$$

Alte exemple de descompuneri:

$$x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$$

Am aplicat de două ori formula diferenței de pătrate.

$$63x^2 - 84xy + 28y^2 = 7(9x^2 - 12xy + 4y^2) = 7(3x - 2y)^2$$

Am dat factor comun pe 7 și am aplicat o formulă de restrângere a pătratului unui binom.

Atenție! Expresia $a^2 + b^2$, unde $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, nu se poate descompune în factori în $\mathbb{R}$.

Să observăm

Folosind formulele de calcul prescurtat, efectuăm:

- transformarea **produselor** în **sumă**

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 + (-2ab) + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 = a^2 + (-b^2)$$

- transformarea **sumelor** în **produse**

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = (x + y)(x + y)$$

$$x^2 + (-2xy) + y^2 = (x - y)^2 = (x - y)(x - y)$$

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

Fiecare transformare ne ajută să aducem expresiile la forma cea mai simplă. Explică de ce, prin exemple!

Gândim critic și constructiv!

Rezolvăm situația-problemă

$$26 \cdot 26 + 26 \cdot 24 + 26 \cdot 24 + 24 \cdot 24 = 26 \cdot 26 + 2 \cdot 26 \cdot 24 + 24 \cdot 24 = 26^2 + 2 \cdot 26 \cdot 24 + 24^2 = (26 + 24)^2 = 50^2 = 2500$$

●●●●▷ **Evaluăm nivelul de bază**

Descompune în factori, aplicând formula potrivită:

- a)** $p^2 + 2py + y^2$; **b)** $x^2 - 6xy + 9y^2$; **c)** $a^2 - 25x^2$; **d)** $625a^2 - 256x^2$.

●●●●▷ **Probleme propuse**

★ 1. Descompune în factori folosind formulele de calcul prescurtat.

Exemplu: $a^2 - 36 = (a - 6)(a + 6)$; $b^2 - 10b + 25 = b^2 - 2 \cdot 5b + 25 = (b - 5)^2$.

- a)** $x^2 - y^2$; **c)** $16 - x^2$; **e)** $4a^2 - b^2$; **g)** $x^2 - 16y^2$; **i)** $x^2 + 8x + 16$; **k)** $4a^2 + 4a + 1$;
b) $m^2 - 9$; **d)** $\frac{64}{81} - c^2$; **f)** $100 - x^4$; **h)** $x^4 - y^4$; **j)** $a^2 - 14a + 49$; **l)** $1 + 6x + 9x^2$.

★ 2. Descompune în factori:

- a)** $x^2 + 6x + 9$; **b)** $4b^2 + 9a^2 - 12ab$; **c)** $5 - 2\sqrt{5}x + x^2$; **d)** $\frac{9}{25}a^2 - 6a + 25$.

★★ 3. Descompune în factori:

- a)** $27a^2 - 18ab + 3b^2$; **c)** $4x^2y^2 + 20xyz + 25z^2$; **e)** $289a^2 - 169b^2$;
b) $576x^2y^2 + 288x^2$; **d)** $81a^2y^2 - 25x^2$; **f)** $361 - 144x^2$.

★★ 4. Descompune în factori:

- a)** $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$; **c)** $0,25 - x^2$; **e)** $2a^2 - 3$; **g)** $x^2 - y^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y$;
b) $x^2 + ax + bx + ab$; **d)** $a^2b^2 - 16c^2$; **f)** $81 - c^2$; **h)** $7x - 7y + 4x^2 - 4y^2$.

★★★ 5. Descompune în factori:

- a)** $1 - 3x + \frac{9}{4}x^2$; **c)** $2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1$; **e)** $16x^2 + 8x + 1$; **g)** $3a^2 - 2\sqrt{3}a + 1$;
b) $x^2 - 2\sqrt{6}x + 6$; **d)** $9 - 3a + 0,25a^2$; **f)** $25 + 10y + y^2$; **h)** $2 + 2\sqrt{6}xy + 3x^2y^2$.

★★★ 6. Descompune în factori:

- a)** $a^4 - b^4$; **c)** $y^2 + 2y - 3$; **e)** $x^4 - 5x^2 + 4$; **g)** $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 2$;
b) $x^8 + x^4 - 2$; **d)** $a^2 - 5a + 6$; **f)** $z^4 - 1$; **h)** $(y^2 + y + 3)(y^2 + y + 5) - 3$.

★★★ 7. Determină numerele reale a și b pentru care sunt adevărate egalitățile:

- a)** $(8 - a)^2 + (b + 9)^2 = 0$; **b)** $\sqrt{a^2 - 2\sqrt{a^2 + 1}} = 0$; **c)** $2b^2 - 2b - 1 = 0$.

8. Fie $E(x)$ o expresie cu coeficienți întregi, cu proprietatea că pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, numărul întreg $E(n)$ nu este număr prim. Putem afirma că E se descompune în factori?

9. Fie a , b și c lungimile laturilor triunghiului ABC . Demonstrează că:

- a)** $(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 4b^2c^2$ dacă și numai dacă $\sphericalangle A = 90^\circ$.
b) $2a^2 + b^2 + c^2 = 2a(b + c)$ dacă și numai dacă ABC este triunghi echilateral.
c) $\frac{c-b}{a} + \frac{a-c}{b} + \frac{b-a}{c} = 0$ dacă și numai dacă ABC este triunghi isoscel.

●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A

Scrie numerele de mai jos ca pătrate de numere reale:

- a)** $g^2 + 2gh + h^2$;
b) $16 + 8x + x^2$.

B

Descompune în factori:

- a)** $x^2 - 2y^2 - xy + 2x - y + 1$;
b) $a^2 - b^2 + c^2 + 2ac$.

C

Completează un pătrat perfect pentru a descompune în factori.

- a)** $x^2 + 6x + 8$;
b) $a^2 + 6ab + 8b^2$.

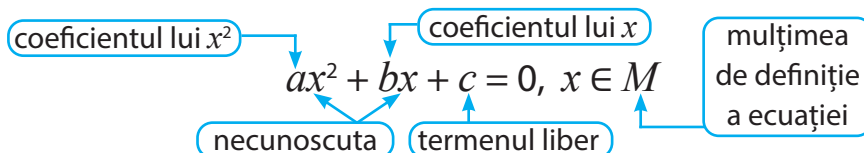
Situații-problemă

1. Dacă mărim latura unui pătrat cu 1 m, aria sa crește cu 7 m^2 . Câți metri are latura pătratului?
 2. Distanța parcursă în t secunde de un corp lăsat să cadă liber este aproximată prin formula $s = 5t^2$. Cât timp durează căderea corpului, dacă acesta a parcurs 35 m în ultima secundă?
 3. Două numere consecutive din șirul pătratelor numerelor naturale au diferența 7. Care sunt numerele?
- Toate aceste probleme se modelează matematic prin ecuația $(x + 1)^2 - x^2 = 7, x \in \mathbb{R}$.

Vrem să știm! Cum reducem o ecuație cu necunoscuta de gradul al doilea la o ecuație deja studiată?

Ne amintim și extindem!

Fiecare dintre scrierile $x^2 + 2x + 3 = 0, x \in \mathbb{Z}$; $x^2 + 3x - 5 = 0, x \in \mathbb{R}$; $x^2 + 4x - 12 = 0, x \in [0; 7]$ reprezintă o ecuație cu necunoscuta x . Ecuația este o egalitate care conține unul sau mai mulți termeni necunoscuți și care devine adevărată numai pentru anumite valori ale necunoscutelor. Folosim următoarele denumiri:



M poate fi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, o mulțime finită sau un interval. Uneori, mulțimea M trebuie determinată pe parcursul rezolvării ecuației.

Definim:

Necunoscuta x ia valori din **mulțimea de definiție** a ecuației. Dacă mulțimea de definiție nu este precizată, se consideră că aceasta este mulțimea $\mathbb{R}$.

Soluție a unei ecuații este acel număr din mulțimea de definiție care transformă ecuația într-o egalitate adevărată, atunci când înlocuiește necunoscuta.

A rezolva o ecuație înseamnă să scriem mulțimea tuturor soluțiilor ecuației.

Exemple:

Necunoscutei x a ecuației $4x^2 - x - 15 = 0$, unde $x \in [0; +\infty)$, i se pot atribui valori numere reale din intervalul $[0; +\infty)$.

-1 este soluție a ecuației $x^2 + 3x + 2 = 0, x \in \mathbb{Z}$ pentru că $-1 \in \mathbb{Z}$ și egalitatea $(-1)^2 + 3(-1) + 2 = 0$ este adevărată.

3 nu este soluție a ecuației $x^2 - 5x + 4 = 0$ deoarece $3^2 - 5 \cdot 3 + 4 \neq 0$.

Mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 - 4 = 0$ este $S = \{-2; 2\}$.

Formulele de calcul prescurtat ne ajută să rezolvăm rapid diferite ecuații.

Rezolvăm situația-problemă



Aplicăm o formulă de calcul prescurtat și ecuația devine: $x^2 + 2x + 1 - x^2 - 7 = 0$, iar apoi obținem $2x - 6 = 0$. Rezultă $2x = 6$ și $x = 3$.

Interpretează situația obținută în contextul fiecărei probleme și verifică dacă aceasta satisface datele.

Gândim critic și constructiv!

Am văzut că ecuația $(x + 1)^2 - x^2 = 7$ este reductibilă la o ecuație de forma $ax + b = 0$.

Nu orice ecuație se poate reduce imediat la forma $ax + b = 0$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

De exemplu, ecuația $x^2 - 2x = 0$ nu are această proprietate. Pentru rezolvarea sa, putem utiliza:

Regula produsului nul

Un produs este nul dacă cel puțin un factor al său este nul.

Altfel spus: $a \cdot b = 0$ dacă și numai dacă $a = 0$ sau $b = 0$.

Cuvântul „sau” definește o operație similară reuniunii mulțimilor, deoarece expresia „ $x \in A$ sau $x \in B$ ” înseamnă „ $x \in A \cup B$ ”. Ca urmare, ecuația $x^2 - 2x = 0$, $x \in \mathbb{R}$ se poate rezolva astfel:

Cum gândim	Cum scriem
❶ Descompunem în factori membrul stâng.	$x(x - 2) = 0$
❷ Produsul a două numere reale este egal cu 0 dacă unul din numere este 0.	$x = 0$ sau $x - 2 = 0$
❸ Rezolvăm fiecare ecuație în parte.	$x = 0$ sau $x = 2$
❹ Reunim mulțimile de soluții.	$S = \{0\} \cup \{2\}$, deci $S = \{0; 2\}$

●●●●▷ Probleme propuse

1. Precizează coeficientul necunoscutei de gradul al II-lea, al termenului de gradul I, termenul liber și mulțimea de definiție pentru:

$$3x^2 - 5x + 4 = 0, x \in \mathbb{R};$$

$$x^2 - 7,5x + 2 = 0, x \in \mathbb{Z};$$

$$x^2 - x + \sqrt{3} = 0, x \in (0; +\infty);$$

$$x^2 + 5x = 0; \quad x^2 + \sqrt{7} = 0; \quad x^2 - \sqrt{7} = 0.$$

2. Scrie câte două ecuații diferite de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ știind că:

a) $a = 2$ și $c = -5$

b) $a = 7$ și $c = -\sqrt{3}$

c) $a = -3$ și $b = -\sqrt{3}$ d) $b = -3$ și $c = -\sqrt{5}$

3. Verifică dacă numerele 2 și -3 sunt soluții ale ecuațiilor: a) $x^2 - 5x + 6 = 0$; b) $x^2 - 5x - 6 = 0$;

c) $x^2 - 9 = 0$; d) $x^2 + 6 = 0$.

4. Rezolvă ecuațiile:

a) $3x = -6$;

d) $1,2 = 0,4z$;

g) $-9 = 3p$;

b) $0,5x = 2$;

e) $0 \cdot z = -1$;

h) $3p = 0$.

c) $1 = \sqrt{2} \cdot y$;

f) $0 \cdot t = 0$;

i) $-3p = 0$.

5. Rezolvă ecuațiile:

a) $1 - 2x = 0$;

e) $0 \cdot y - 2 = 0$;

b) $2x + 1 = 0$;

f) $\sqrt{2} \cdot z - 1 = 0$;

c) $4y + 12 = 0$;

g) $0 \cdot z + 2 = 0$;

d) $-12y + 4 = 0$;

h) $-3z + \sqrt{2} = 0$.

6. Rezolvă ecuațiile:

a) $3(x - 1) + 1 = 2x + 2$;

b) $\frac{4x+2}{5} = \frac{1-x}{2}$;

c) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{x}{3}$;

d) $0,2 + 1 = 2 + x$; e) $\sqrt{2} \cdot x + 3 = 1 - \sqrt{2}$.

7. Alege răspunsul corect.

Mulțimea soluțiilor ecuației este:

a) $5x^2 - 7x = 0$

A. $\left\{0; -\frac{7}{5}\right\}$; B. $\left\{0; \frac{7}{5}\right\}$; C. $\left\{\frac{7}{5}\right\}$.

b) $3(y + 2) - y(y + 2) = 0$

A. $\{-2; 3\}$; B. $\{1; -2\}$; C. $\{-1; -2\}$.

8. Determină x din ecuația $1, (3) + x = \frac{1}{2}x + 1$.

9. Stabilește dacă rezolvările următoare sunt corecte. Dacă nu, găsește greșeala.

a) $x^2 - 7x = 0 \quad |:x$ b) $(x - 2)^2 = 4$

$x - 7 = 0$

$x - 2 = 2$ sau $x - 2 = -2$

$x = 7$

$x = 4$

sau $x = 0$

$S = \{7\}$.

$S = \{0; 4\}$.

10. Rezolvă ecuațiile următoare:

a) $x(x - 2) - x^2 = 4$;

e) $(x + 1)(x - 2) - x(x - 1) = 0$

i) $(2z - 1)^2 = z(4z + 1)$;

b) $(1 - y)^2 = y^2 + 2$;

f) $(2y - 1)(y + 1) = 2y(y - 1)$;

j) $(\sqrt{2} + x)^2 = x^2 + 1$;

c) $2z^2 + 5 = z(2z + 1)$;

g) $0,25x^2 + x = (0,5x - 1)^2$;

k) $(x + 2)^2 = x^2 + 1$;

d) $x^2 + x = x(x + 2) - x$;

h) $y(y + 2) - y(y - 1) = 3$;

l) $x^2 = (x - 3)^2$.

●●●●▷ Alege și rezolvă în 5 minute!

Rezolvă ecuația în $\mathbb{R}$:

A $3x + 5 = 7x - 12$

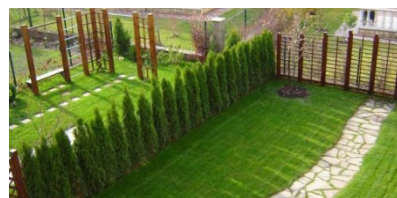
B $(z + 1)^2 - 36 = 0$

C $(3x - 2)^2 = 8 - 12x$

O situație-problemă

O grădină de formă dreptunghiulară cu aria de 96 m^2 era împrejmuită cu un gard de sârmă cu perimetrul de 40 m . Întrucât pe trei laturi ale grădinii vor fi alte construcții, pe o singură latură se va ridica un gard nou. Ce lungime ar trebui să aibă acest gard?

Notăm cu x lungimea căutată. Din datele problemei, obținem ecuația $x(20 - x) = 96$ echivalentă cu $x^2 - 20x + 96 = 0$.



Vrem să știm! Cum resolvăm ecuațiile de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$?

Metoda de rezolvare a unei ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$ depinde de valorile coeficienților ecuației.

➔ 1. Cum resolvăm ecuația de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ în cazuri particulare?

În funcție de coeficienții a, b, c , putem avea următoarele cazuri:

Cazul 1. $b = c = 0$

Avem $ax^2 = 0$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0; S = \{0\}.$$

Exemple:

$$\sqrt{2}x^2 = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0, S = \{0\}.$$

Cazul 2. $b \neq 0, c = 0$

Avem $ax^2 + bx = 0$

Dăm factor comun și obținem $x(ax + b) = 0$

Conform regulii produsului nul, avem $x = 0$ sau $ax + b = 0$

Rezolvăm ecuația $ax + b = 0$

$$ax = -b \quad | : a$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Mulțimea soluțiilor ecuației date este $S = \left\{0; -\frac{b}{a}\right\}$.

$$-4x^2 + 8x = 0$$

$$-4x(x - 2) = 0$$

$$-4x = 0 \text{ sau } x - 2 = 0$$

Obținem:

$$x = 0 \text{ sau } x = 2,$$

$$S = \{0, 2\}.$$

Cazul 3. $b = 0, c \neq 0$

Avem $ax^2 + c = 0 \quad | : a$

$$x^2 + \frac{c}{a} = 0$$

Dacă $\frac{c}{a} > 0$, cum $x^2 \geq 0$, avem $x^2 + \frac{c}{a} > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, deci ecuația nu are soluții reale.

Dacă $\frac{c}{a} < 0$, atunci $x^2 - \left(-\frac{c}{a}\right) = 0$.

Notăm $h = -\frac{c}{a}$ și obținem ecuația $x^2 - h = 0$

Descompunem în factori: $(x - \sqrt{h})(x + \sqrt{h}) = 0$

De aici rezultă $(x - \sqrt{h}) = 0$ sau $(x + \sqrt{h}) = 0$

Obținem $x = \sqrt{h}$ sau $x = -\sqrt{h}$

În concluzie, mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{-\sqrt{h}; \sqrt{h}\}$.

Scriem pe scurt $S = \{\pm\sqrt{h}\}$.

a) $-4x^2 - 9 = 0$ nu are soluții reale pentru că $-4x^2 - 9 < 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{b) } -4x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{3}{2} = 0$$

$$\text{sau } x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ sau } x = -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \frac{3}{2},$$

$$S = \left\{\pm \frac{3}{2}\right\}.$$

➔ 2. Cum rezolvăm ecuația de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ în cazul general?

●●●●▷ Să comparăm

$$x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot 3x + 9 - 8 = 0$$

$$(x+3)^2 - (\sqrt{8})^2 = 0$$

$$(x+3+2\sqrt{2})(x+3-2\sqrt{2}) = 0$$

$$x_1 = -3 - 2\sqrt{2} \text{ sau } x_2 = -3 + 2\sqrt{2}$$

$$S = \{-3 - 2\sqrt{2}; -3 + 2\sqrt{2}\}$$

În rezolvarea ecuației $x^2 + 6x + 1 = 0$ am exprimat membrul I ca o diferență de pătrate. Am obținut două soluții reale.

$$x^2 + 6x + 10 = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot 3x + 9 + 1 = 0$$

$$(x+3)^2 + 1 = 0$$

$$(x+3)^2 \geq 0 \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}$$

$$(x+3)^2 + 1 \geq 1 > 0 \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}$$

Deci ecuația nu are soluții reale.

În rezolvarea ecuației $x^2 + 6x + 10 = 0$ am exprimat membrul I ca o sumă de pătrate. Mulțimea soluțiilor este vidă.

Pentru a rezolva o ecuație de tipul $ax^2 + bx + c = 0$, căutăm să obținem o diferență de pătrate.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad | : a, \quad a \neq 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

Exemplu:

$$2x^2 + x - 3 = 0 \quad | : 2$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$$

$$\left(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}\right) - \frac{1}{16} - \frac{3}{2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} = 0$$

Descompunem în factori:

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

Deci

$$\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

De unde rezultă:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ și } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\left(x + \frac{1}{4} - \frac{5}{4}\right) \left(x + \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\right) = 0$$

$$(x-1) \left(x + \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$x_1 = 1 \text{ și } x_2 = -\frac{3}{2}$$

●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

Evidențiem o diferență de pătrate:

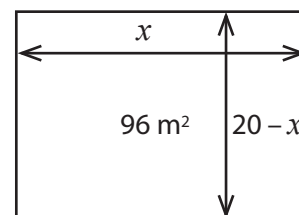
$$x^2 - 20x + 96 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 10x + 96 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 10x + 100 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-10)^2 - 4 = 0.$$

Descompunem în factori și obținem $(x-10-2)(x-10+2) = 0$, adică $(x-12)(x-8) = 0$.

Rezultă $x_1 = 12$, $x_2 = 8$. Noul gard va măsura 12 m sau 8 m, în funcție de latura pe care va fi construit.

Verificăm: Aria = $12 \cdot 8 = 96 \text{ (m}^2\text{)}$, perimetrul = 40 m.



●●●●▷ **Evaluăm nivelul de bază**

Rezolvă ecuațiile prin descompunere în factori: **a)** $x^2 = 2$; **b)** $x^2 - 2x = 0$; **c)** $x^2 - 2x - 2 = 0$.

●●●●▷ **Probleme propuse**

1. Completează tabelul următor:

Ecuația	Coeficientul termenului de gradul al II-lea	Coeficientul termenului de gradul I	Termenul liber
$2x^2 + 3x - 1 = 0$			
$x^2 - 2x + 3 = 0$			
	2	1	3
$-3x^2 + x = -1$			

2. Stabilește mulțimile de soluții ale ecuațiilor:

- a)** $2x^2 - 4x = 0, x \in \mathbb{R}$; **c)** $x^2 - 5x + 6 = 0, x \in \mathbb{R}$;
b) $x^2 - 5 = 0, x \in \mathbb{R}$; **d)** $6x - 4x^2 = 0, x \in \mathbb{R}$.

5. Alege răspunsul corect:

- a)** Mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 - 7x + 10 = 0, x \in \mathbb{R}$, este: **A)** $\{2\}$ **B)** $\{5\}$ **C)** $\{2; 5\}$ **D)** $\emptyset$.
b) Numărul de soluții reale ale ecuației $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0, x \in \mathbb{R}$, este:
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3
c) Ecuația $3x^2 - x + 2 = 0, x \in \mathbb{R}$, are:
A) o singură soluție reală;
B) două soluții reale;
C) o infinitate de soluții reale;
D) mulțimea soluțiilor reale vidă.

8. Rezolvă următoarele ecuații:

- a)** $(x + 1)^2 + (x + 2)^2 = (x + 3)^2, x \in \mathbb{R}$;
b) $(x + 1)(x - 1) = 2, x \in \mathbb{R}$;
c) $x^2 + 1 + 4x = 2x, x \in \mathbb{R}$;
d) $x(x + 3) - 1 = x^2 + 3x, x \in \mathbb{R}$.

9. Calculează $a - \frac{1}{a}$ dacă $a^2 + 3a + 2 = 0$.

10. Rezolvă ecuațiile: **a)** $0,25x^2 + x - 1 = 0, x \in \mathbb{R}$;
b) $x^2 + x\sqrt{5} - 1 = 0, x \in \mathbb{R}$.

13. Determină a , știind că ecuația $(a^2 - 1)x - a = 0, x \in \mathbb{R}$ are soluția 2.

14. Arată că, dacă a, b, c sunt numere întregi impare, ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ nu poate avea soluții raționale.

3. Rezolvă ecuațiile prin descompunere în factori.

- a)** $x^2 - 2x - 1 = 0, x \in \mathbb{R}$; **d)** $3x^2 + x - 2 = 0, x \in \mathbb{R}$;
b) $-2x^2 + x + 3 = 0, x \in \mathbb{R}$; **e)** $x^2 - 4 = 0, x \in \mathbb{R}$;
c) $2x^2 - 4x + 2 = 0, x \in \mathbb{R}$; **f)** $2x^2 + 3x = 0, x \in \mathbb{R}$.

4. Rezolvă ecuațiile prin descompunere în factori.

- a)** $x^2 - 1 = x + 3, x \in \mathbb{R}$;
b) $2(x + 1) - x(x + 1) = 0, x \in \mathbb{R}$;
c) $x^2 - 6x + 9 = 4, x \in \mathbb{R}$;
d) $\frac{x^2 - 1}{2} = \frac{x - 1}{3}, x \in \mathbb{R}$;
e) $1 - (x - 2)^2 = 0, x \in \mathbb{R}$.



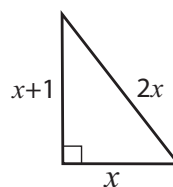
6. **a)** Scrie o ecuație de forma $x^2 + bx + 1 = 0$ care are soluția 3.

b) Scrie o ecuație de forma $(x - a)(x - b) = 0$ care are mulțimea soluțiilor $S = \left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\}$.

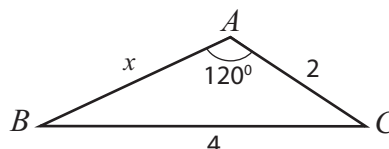
c) Scrie o ecuație de forma $x^2 - a = 0$, care are mulțimea soluțiilor $S = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$.

7. Lungimea laturii unui pătrat se mărește cu 7 cm și se obține un pătrat cu aria de 100 cm². Care este lungimea laturii pătratului inițial?

11. Calculează lungimea laturilor triunghiului dreptunghic din figura alăturată.



12. Determină lungimea laturii AB a triunghiului din figură.



●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**



Rezolvă ecuația în $\mathbb{R}$
 $x^2 - 4x + 4 = 0$.



Rezolvă ecuația în $\mathbb{R}$ $x^2 - 7x + \frac{45}{4} = 0$.



Rezolvă ecuația în $\mathbb{R}$
 $(x - 2)^2 - 2x + \frac{5}{4} = 0$.

- ★
1. Asociază fiecărei ecuații din coloana A soluția ei, din coloana B.

A	B
$2x - 6 = 0$	1
$-2x + 4 = 0$	2
$2x - \sqrt{4} = 0$	3
	4

2. Efectuează:
a) $2x + 3y - x + 7y$; **b)** $(3x) \cdot (7x^3y)$;
c) $(9x^4y) : (3x^3y)$; **d)** $(6x^4)^3$.

★★

5. Efectuează:
a) $(8xy^4) : (2xy)$;
b) $(10ab^3c^2d) : (2,5abcd)$;
c) $(18x^2y^4z) : (2,7x^2y^3)$;
d) $(\sqrt{10} a^5b^3c^3d) : (\sqrt{8} a^5b)$.
6. Efectuează:
a) $(3x^2y)^3$; **b)** $(-5abc^3)^2$;
c) $(0,5x^2y^3z)^5$; **d)** $(-\sqrt{3} a^5bc)^4$.
7. Efectuează:
a) $2x(3x - 2y)$;
b) $-ax^2(2a^2 + x - 1)$;
c) $(6ab^2x^2 + 4abx^3 - \sqrt{6} a^2bx) : (\sqrt{2} abx)$.
8. Calculează:
a) $(x - 3)(x + 9)$;
b) $(2a + 5)(3b - 7)$;
c) $(2x^2 + 1)(4x^4 - 2x^2 + 1)$;
d) $(9x^2 + 6xy + 4y^2)(3x - 2y)$.

★★★

11. Descompune în factori:
a) $a^2 + 10a + 25$; **b)** $81 + 18x + x^2$;
c) $121a^2 - 22a + 1$; **d)** $a^4 - 2a^2 + 1$;
e) $3y^2 - \sqrt{12}y + 1$; **f)** $0,01x^2 + 0,2x + 1$;
g) $16 - x^2$; **h)** $t^2 - u^2$; **i)** $a^2b^2 - c^2d^2$;
j) $9 - (a + 1)^2$; **k)** $(x - 2)^2 - (x + 3)^2$;
l) $(2x - 1)^2 - (x - 3)^2$; **m)** $64 - x^4$; **n)** $y^8 - 256$.

12. Alege răspunsul corect!

Numărul real a pentru care 1 este soluție a ecuației $x^2 - ax + 4 = 8$ este:

A) 1 **B)** -3 **C)** 0 **D)** -1.

3. Scrie mulțimile de soluții ale ecuațiilor:
a) $4x = 16$; **e)** $0,4x - 1,6 = 0$;
b) $-4x = 8$; **f)** $-0,4x + 0,8 = 0$;
c) $4x = 2$; **g)** $3(x + 1) = x + 3$;
d) $-4x = -1$; **h)** $3(2x - 1) = 6x - 3$.

4. Aproximează prin rotunjire la ordinul sutimilor soluțiile ecuațiilor:
a) $3x = 5$; **c)** $x + \sqrt{2} = \sqrt{6}$;
b) $x\sqrt{2} = \sqrt{6}$; **d)** $2x - \sqrt{3} = \sqrt{5}$.

9. Calculează, folosind formula diferenței de pătrate:
a) $(x - 11)(x + 11)$; **b)** $(6 + a)(6 - a)$;
c) $(3x - 4)(3x + 4)$; **d)** $(2y^3 - 9)(9 + 2y^3)$;
e) $(x^2 + 5)(5 - x^2)$; **f)** $(\sqrt{3}x - \sqrt{5}y)(\sqrt{3}x + \sqrt{5}y)$.
10. Descompune în factori, folosind metoda factorului comun:
a) $9a + 9b$;
b) $12a + 24b + 12c$;
c) $a^3 + a^2 + a$;
d) $18x^4 + 6x^2$;
e) $2tu - 3(tu)^2 - 4(tu)^3$;
f) $(x + 1)(x - 2) + 6(x - 2)$;
g) $4(x - 5) + 2x(x - 5)$;
h) $3x(x - \sqrt{7}) + 3x(x + \sqrt{7})$;
i) $(x - 2)^2 - 2(x - 2)$;
j) $(x + 7)(x - 2) + (x - 3)(x - 2)$.

13. Descompune în factori:

- a)** $(x^2 - 1)(x^2 - 4) + 2$;
b) $(x^2 + x)(x^2 + x + 1) - 2$;
c) $(a + b)^2 + 2(a + b)(a - b) + (a - b)^2$;
d) $(3 - x)^2 - 2(9 - x^2) + (3 + x)^2$;
e) $(x + 1)^2 + 2(x^2 - 1) + (x - 1)^2$;
f) $(x + 2)^2 + 2(x^2 - 4) + (x - 2)^2$;
g) $(2x - 1)^2 + 2(4x^2 - 1) + (2x + 1)^2$.

14. Descompune prin completare la un pătrat:

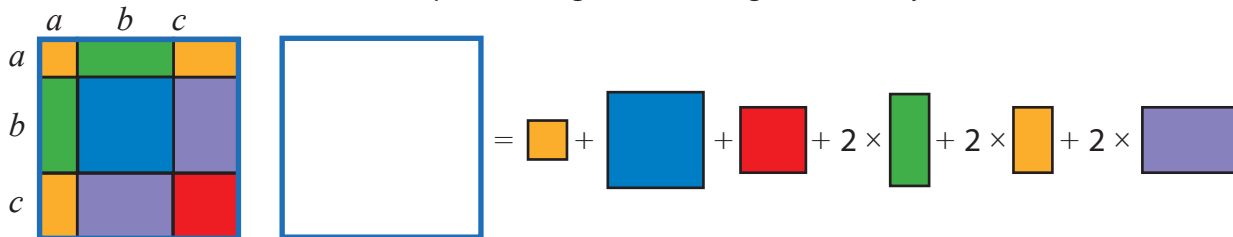
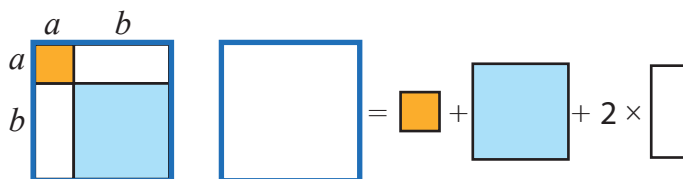
- a)** $9x^2 + 6x - 3$ **b)** $x^2 + 4x - 5$
c) $3 - 9x^2 + 6x$ **d)** $x^2 + 4x + 3$
e) $x^2 - 6x + 5$ **f)** $x^2 - 2x - 3$ **g)** $x^4 + 2x^2 - 3$

15. Investigație

Figura alăturată îți arată o demonstrație geometrică a formulei:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Ce formulă de calcul crezi că este prezentată geometric în figurile de mai jos?



Determină, prin calcul algebric, formulele pentru a scrie în forma cea mai simplă: $(a - b + c)^2$, $(a - b - c)^2$, $(a + b)^3$ și $(a - b)^3$.

16. Rezolvă ecuațiile următoare, descompunând membrul stâng într-un produs:

a) $2x^2 - 3x = 0$; b) $x(x - 1) - 2(x - 1) = 0$;

c) $3y^3 + y^2 = 0$; d) $(y + 2)^2 - 9 = 0$;

e) $(z + 1)^2 + 4 = 4$; f) $8 - 2(x - 1)^2 = 0$;

g) $1 - 9z^2 = 0$; h) $y(y + 3) - 2(y + 3) = 0$.

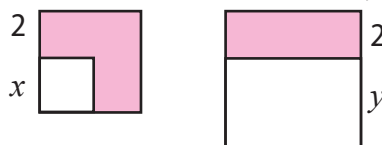
17. Determină numărul m știind că ecuația $x^2 - mx = 3$, $x \in \mathbb{R}$, are soluția 2.

18. Determină o ecuație $ax^2 + bx + c = 0$, $x \in \mathbb{R}$ care are mulțimea soluțiilor $S = \{1; 2\}$.

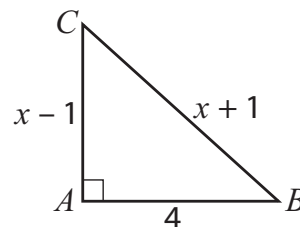
19. Determină dimensiunile unui dreptunghi cu aria de $2,45 \text{ m}^2$, care este de 5 ori mai lung decât lat.

20. Care numere naturale consecutive au produsul egal cu 132?

21. Aria fiecărei suprafețe colorate în pătrate este de 12 cm^2 . Determină x și y .



22. Determină aria și perimetrul triunghiului dreptunghic alăturat.



23. Determină valorile cele mai mici ale următoarelor expresii, precum și numerele x corespunzătoare acestora: a) $x^2 + 4x + 3$; b) $x^2 - 4x + 3$; c) $x^2 + 6x + 8$; d) $x^2 - 6x + 5$; e) $x^2 - 2x - 3$; f) $x^2 + 10x + 24$; g) $x^2 + 2x - 8$.

24. Determină valorile cele mai mari ale următoarelor expresii, precum și numerele x corespunzătoare acestora: a) $-x^2 + 2x + 4$; b) $-x^2 + 3x - 2$; c) $-2x^2 + x + 1$; d) $-x^2 + x - 1$; e) $-3x^2 + 2x + 1$; f) $-x^2 + 2x$; g) $-4x^2 - 2x + 2$.

25. Determină $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^2 + (2m + 1)x + 1 = 0$ să aibă soluția $\frac{1}{2}$.

26. Determină $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^2 - 2x + m = 0$ să aibă două soluții reale și distincte.

27. Rezolvă următoarele ecuații:

a) $x^2 - 9 = 0$; b) $(2x + 1)^2 - 25 = 0$;

c) $(7x + 1)^2 = (-x + 4)^2$; d) $x^2 + 23x + 22 = 0$;

e) $2x^2 - 10x + 37 = 0$; f) $x^2 - x + 0,25 = 0$;

g) $30x^2 + 2x + 5 = 0$; h) $x^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{5})x + \sqrt{15} = 0$;

i) $x^2 - (2 + \sqrt{7})x + 2\sqrt{7} = 0$;

j) $(x^2 + x + 1)^2 = x^2$; k) $(2x + 2)^2 = (x + 1)^2$;

l) $(x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 5x^2 + 2(x + 3)^2$;

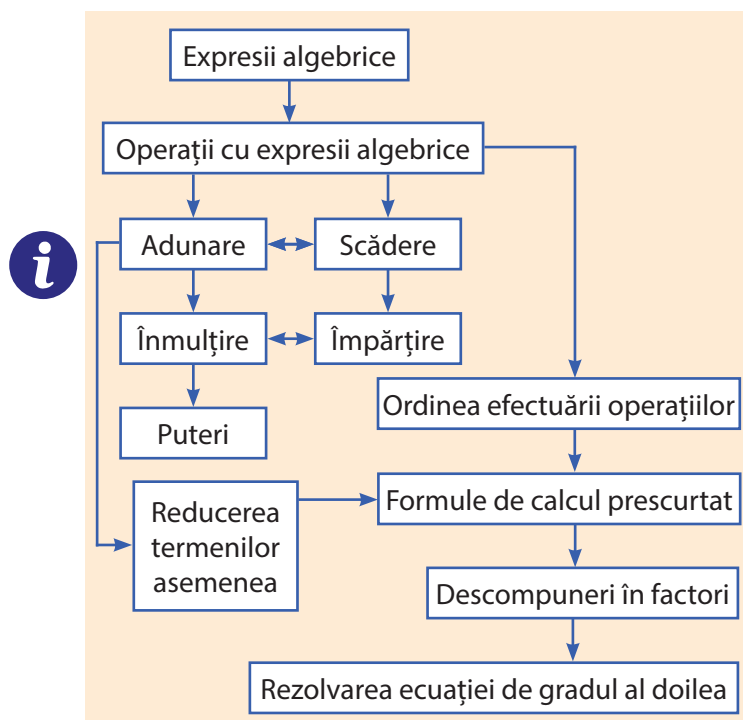
m) $(x - 1)(x + 4) - 5(x + 2)(x - 3) = (x + 1)^2 - (x - 3)^2$.

28. Determină $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^2 + 3mx - 6m = 0$ să aibă două soluții reale egale.

29. Determină $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $mx^2 - x - 1 = 0$ să nu aibă soluții reale.

Ce am învățat?

●●●●▷ Rezolv testele pentru a verifica dacă pot:

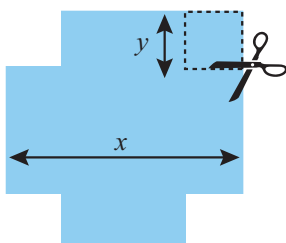


- să efectuez calcule cu numere reale reprezentate prin litere
- să stabilesc dacă un număr real este soluție a unei ecuații
- să aplic formule de calcul prescurtat în expresii algebrice
- să descriu situații concrete utilizând expresii algebrice
- să rezolv exerciții care pun în evidență avantajele utilizării unor formule de calcul prescurtat
- să rezolv ecuații de gradul al doilea

Utilizează schema de mai sus și adaugă în portofoliu elementele esențiale din lecțiile unității 2, referitoare la conceptele menționate.

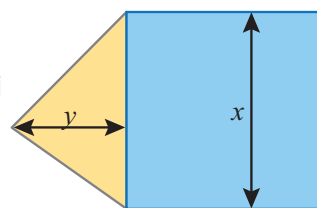
●●●●▷ Testul 1

- Calculează și scrie în forma cea mai simplă:
a) $(6x^3y^4) : (3xy^3)$; **b)** $(-\sqrt{2}a^5bc)^3$;
c) $-ax^2(5a^2 + 2x - 1)$; **d)** $(3x^2 - 1)(3x^4 - x^2 + 5)$.
- Demonstrează că numărul real $\frac{1}{2}$ este soluție a ecuației $2x^2 - 5x + 2 = 0$.
- Alege răspunsul corect! După efectuarea calculelor, $(1 - y)^2 - (y + 1)(y - 1) = \dots$
A) $2 - 2y$ **B)** $2y^2 - 2y$ **C)** 0 **D)** $2 - 2y^2$.
- Pentru confecționarea unei cutii, dintr-o foaie pătrată de tablă cu latura de lungime x se taie, din colțuri, patru pătrate cu latura de lungime y . Determină aria tablei rămase.
- Demonstrează că, împărțind orice număr natural pătrat perfect la 8, obținem restul 0, 1 sau 4.
- Rezolvă ecuația $x^2 - 10x + 16 = 0$.



●●●●▷ Testul 2

- Calculează și scrie în forma cea mai simplă:
a) $(8ab^3c^2) : (4abc)$; **b)** $(1,5x^3y^2z)^3$;
c) $2x(3x - 2y)$; **d)** $(x^2 + 2xy + 4y^2)(2x - 3y)$.
- Determină numărul real a , dacă -1 este soluție a ecuației $x^2(a + 1) - 11 = 0$.
- Alege răspunsul corect! După efectuarea calculelor, $(1 + y)^2 + (y + 1)(1 - y) = \dots$
A) $2 + 2y$ **B)** $2y^2 + 2y$ **C)** 0 **D)** $2 + 2y^2$.
- Pentru realizarea unui ornament, a fost lipit un triunghi de înălțime y pe o latură a unui pătrat. Determină aria ornamentului.
- Demonstrează că, împărțind orice număr natural pătrat perfect la 4, obținem restul 0 sau 1.
- Rezolvă ecuația $x^2 - 10x + 21 = 0$.



Proiect: *Ecuații, algoritmi și scheme logice*

Plan de lucru

- ➡ **Scop:** Veți realiza un poster conținând algoritmi și scheme logice pentru rezolvarea principalelor tipuri de ecuații și inecuații studiate
- ➡ **Materiale necesare:** o coală A3, coli A4, riglă, creioane colorate, eventual o aplicație Word

Realizarea proiectului

Lucrați în echipe de trei, patru sau cinci colegi.

- ➡ Observați schema de mai jos, reprezentând rezolvarea ecuației de forma $ax + b = 0$, studiată în clasa a VII-a.
- ➡ Transpuneți sub forma unei scheme logice tipurile de ecuații studiate pe parcursul acestei unități.
- ➡ Adăugați câte un exemplu de ecuație pentru cazurile menționate în scheme și rezolvați aceste ecuații (în cazul în care admit soluții!)
- ➡ Aplicați pe posterul vostru toate produsele realizate, într-o manieră cât mai estetică.

Pentru început:

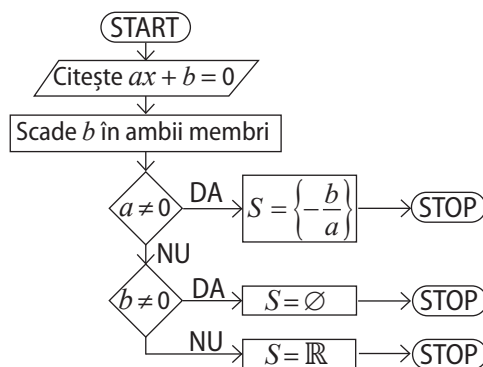
- ➡ Urmăriți schema logică alăturată.
- ➡ Introduceți date de intrare (adică o ecuație de forma $ax + b = 0$) și aplicați pașii algoritmului.
- ➡ Faceți același lucru pentru o altă ecuație.
- ➡ Transpuneți într-o schemă logică rezolvarea inecuației de forma $ax + b < 0$ ($>$, $\leq$, $\geq$).
- ➡ Propuneți câte un exemplu pentru fiecare dintre inecuațiile pentru care ați realizat schemele logice.

$$\begin{aligned} ax + b &= 0, x \in \mathbb{R} \\ ax + b &= 0, \quad | -b \\ ax + b - b &= -b \\ ax &= -b \end{aligned}$$

- Dacă $a \neq 0$, atunci:

$$x = -\frac{b}{a}, \quad S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$$

- Dacă $a = 0$ și $b \neq 0$, atunci $S = \emptyset$.
- Dacă $a = 0$ și $b = 0$, atunci $S = \mathbb{R}$.



Interacționați în echipa voastră, realizați posterul, apoi **prezentați-l** în clasă.

Autoevaluare

✓ Rezolvă problemele și alege răspunsurile corecte, pentru a verifica ce știi la început de *unitate de învățare*.

1. Valoarea numerică a expresiei algebrice

$$E(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 4, \text{ pentru } x = 1, \text{ este}$$

- A) 1 B) -4 C) -2 D) 0

2. În expresia $5x^3y^2z + 20x^3y^2 - 15x^2y^3z$, factorul comun este

- A) $5x^2y^2z$ B) xyz C) $10x^2y^2$ D) $5x^2y^2$

3. Calculând $(2x - 3)(2x + 3)$, se obține

- A) $4x^2 - 3$; B) $4x^2 + 9$; C) $4x^2 - 6$; D) $4x^2 - 9$.

4. Calculând $(3x - 2)^2$, se obține

- A) $9x^2 + 4$; B) $9x^2 - 6x + 4$;

C) $9x^2 - 12x + 4$;

D) $9x^2 - 4$.

5. După reducerea termenilor asemenea, expresia $E(x) = 2x^2 + 8x + 9 - 2x^2 - 6x - 9$ devine

A) $E(x) = 14x$;

B) $E(x) = -4x^4$;

C) $E(x) = 2x$;

D) $E(x) = 0$.

6. Rezultatul calculului $3x(x + 1) - x(3x - 1)$ este:

A) $2x$

B) $9x^2 + x$

C) $4x$

D) $9x^2 - x$

7. În ecuația $5x^2 - 3x - 1,5 = 0$, termenul liber este:

A) 1,5

B) -1,5

C) 5

D) -3

8. Mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 - 5x + 4 = 0$ este:

A) $\{-1; 5\}$

B) $\{1; 4\}$

C) $\{1; -4\}$

D) $\{-1; 4\}$

Ce știi deja? Verific!

Test inițial de (auto)evaluare

Timp de lucru: 45 minute

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni și rezultate necesare pentru parcurgerea acestei Unități de învățare. Fiecare problemă propusă valorează 1 punct. Se acordă 1 punct din oficiu.

I. *Scrive pe foaia de rezolvare cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.*

Pătratul unui număr real

1. Numerele reale al căror pătrat este 9 sunt ...

Operații cu numere întregi

2. Rezultatul calculului $(-3 + 1) \cdot (-5)^2$ este ...

Operații cu numere raționale

3. Pătratul numărului $(3,2 - 0,1) : 3$ este ...

II. *Scrive pe foaia de rezolvare litera corespunzătoare răspunsului corect pentru următoarele exerciții:*

Radicalul unui număr real

4. Numărul $\sqrt{72}$ este egal cu:
A. 6; B. $-6\sqrt{2}$; C. $6\sqrt{2}$; D. $6\sqrt{3}$.

Ecuatii de forma $ax + b = 0$

5. Soluția ecuației $2x - 11 = 0$ este:
A. 5,5; B. -5; C. 6,5; D. -5,5.

Reducerea termenilor asemenea

6. Forma cea mai simplă a expresiei $2(0,5x - 3y) - 3(x - 2y)$ este:
A. $-2x + 12y$; B. $-2x$; C. $-x + 12y$; D. $2x + 12y$.

III. *Scrive rezolvările complete ale exercițiilor următoare:*

Valoarea unei expresii algebrice

7. Determină valoarea expresiei
 $E(x) = 3(x - 1)^2 + (x - 3\sqrt{2})(x + 3\sqrt{2}) - (3x - 2)^2$ pentru $x = \frac{1}{3}$.

Reducerea unei expresii la forma cea mai simplă

8. Calculează și scrie în forma cea mai simplă
a) $E(x) = (2x - 3)^2 - (x + 3)(x - 3)$;
b) $E(x) = (2x - 5)(2x + 5) - (2x - 5)$.

Descompuneri în factori

9. Descompune în factori:
a) $3a^3b - 6a^2b^2 + 3ab^3$
b) $ab + a + b + 1$
c) $x^4 - 25$
d) $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3$.

Dacă ai obținut mai puțin de jumătate din punctaj la acest test, este util să revezi definițiile și proprietățile conceptelor menționate mai sus, pentru a înțelege mai bine ceea ce urmează.

► O situație-problemă

Ema avea o ciocolată pe care a decis s-o împartă colegilor. Ea a împărțit tableta de ciocolată în 24 de părți egale, apoi s-a gândit că nu sunt destule bucăți și a mai împărțit fiecare bucată obținută în câte 2 bucăți. Tic a venit și a luat 18 bucăți mici. Ce parte din întreaga ciocolată a luat Tic?

Vrem să știm! Cum scriem rapoarte în forma cea mai simplă?

➔ 1. Ce înțelegem prin rapoarte (fracții) algebrice?

► Să comparăm

$\frac{2 \cdot 5 - 1}{3 \cdot 5}$; $\frac{2 \cdot 10^4 - 1}{3 \cdot 10^4}$; $\frac{2\sqrt{5} - 1}{3\sqrt{5}}$ sunt rapoarte

numerice sau fracții. Valorile lor se pot determina prin împărțirea număratorului la numitor.

$\frac{2x-1}{3x}$; $\frac{2}{x-1}$; $\frac{3x^2y-1}{xy}$ sunt rapoarte sau fracții

algebrice. Atribuind variabilelor valori numerice care nu anulează numitorul, obținem fracții.

Știm că împărțirea la 0 nu are sens. Atunci, cum procedăm cu fracțiile algebrice care au necunoscute la numitori? Trebuie să ne asigurăm că acești numitori sunt nenuli. De exemplu, în cazul fracției algebrice $\frac{2}{x-1}$ nu putem determina valoarea pentru $x = 1$.

Definim:

Mulțimea de definiție a unei fracții algebrice este mulțimea pentru care se poate calcula valoarea numerică a fracției algebrice.

Dacă o valoare numerică atribuită variabilei anulează numitorul unei fracții algebrice, spunem că fracția **nu are sens sau nu este definită** pentru acea valoare.

Putem defini **egalitatea a două rapoarte algebrice** numai pentru acele valori ale variabilelor care nu anulează numitorii.

Exemple:

Pentru fracția algebrică $\frac{2}{x-1}$, mulțimea de definiție este $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Fracția algebrică $\frac{2}{x-1}$ nu este definită pentru $x = 1$.

Avem $\frac{2}{x-1} = \frac{6}{3x-3}$ numai dacă $x \neq 1$.

Dacă $x = 1$, egalitatea nu are sens.

Pentru a determina mulțimea de definiție a unei fracții algebrice procedăm astfel:

Tehnica de calcul

1. Rezolvăm ecuația $\text{numitor} = 0$.

2. Eliminăm din $\mathbb{R}$ soluțiile acestei ecuații.

Exemplu:

Fie $E(x) = \frac{5+2x}{4+x}$. Avem $4+x=0$
 $x=-4$

$E(x)$ este definită pe mulțimea $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

➔ 2. Cum efectuăm amplificarea unei fracții algebrice?

Fracție numerică	Fracție algebrică
$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$	Este necesar să precizăm mulțimea de definiție pentru care egalitatea are sens. $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2+x}{x^2-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

➔ 3. Cum efectuăm simplificarea unei fracții algebrice?

Fracție numerică	Fracție algebrică
$\frac{12}{27} = \frac{12:3}{27:3} = \frac{4}{9}$ Fracția obținută este ireductibilă.	Este necesar să precizăm mulțimea de definiție pentru care egalitatea are sens. $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; +1\}$. Fracția obținută este ireductibilă (nu se mai poate simplifica).

●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

Notăm cu p aria unei bucăți de ciocolată după prima diviziune făcută de Ema și cu s aria obținută după a doua diviziune. Avem $p = 2s$. Partea luată de Tic reprezintă: $\frac{18s}{24 \cdot 2s} = \frac{3 \cdot s}{8 \cdot s} = \frac{3}{8}$.

●●●●▷ Descoperă greșeala

Profesorul le-a cerut elevilor să simplifice fracția $\frac{x^2 + 2x}{x^3 - 4x}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$. Iată cum au procedat ei:



Tic	Dan
$\frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x}}{x^3 - 4x} = \frac{1+1}{x-2} = \frac{2}{x-2}$	$\frac{x^2 + 2x}{x^3 - 4x} = \frac{1 \cdot x(x+2)}{1 \cdot x(x^2 - 4)} = \frac{1 \cdot x+2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$

Rezultatele obținute sunt diferite. Care dintre elevi a greșit? Atenție! Numai factorii se pot simplifica!

Folosim amplificarea pentru a raționaliza numitorul unei fracții.

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{5(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{5(2+\sqrt{3})}{4-3} = 5(2+\sqrt{3})$$

●●●●▷ Exerciții rezolvate

Raționalizează numitorii următoarelor fracții:

$$1. \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$$

$$2. \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{4}$$

$$3. \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$4. \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \frac{\sqrt{5}-2}{1} = \sqrt{5}-2$$

De ce este necesar să raționalizăm numitorul unei fracții?

Gândim critic și constructiv!

●●●●▷ Probleme propuse

1. Determină mulțimea de definiție a fiecărei fracții:

$$A(x) = \frac{2}{x-3}; \quad B(x) = \frac{7-x}{7+x}; \quad C(x) = \frac{4-x^2}{4+x^2}.$$

2. Raționalizează numitorii:

$$a) \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{75}}; \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}; \frac{-5\sqrt{7}}{3\sqrt{5}}; \quad b) \frac{1}{\sqrt{3}-1}; \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}.$$

3. Pentru $x \neq 0$ și $x \neq 2$, amplifică rapoartele cu $x-2$:

$$a) \frac{x-2}{x}; \quad b) \frac{x+2}{x-2}; \quad c) \frac{x^2-4}{x^2}; \quad d) \frac{x-1}{x-2}.$$

4. Pentru x aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții algebrice, simplifică:

$$a) \frac{x+2}{x^2-4}; \quad b) \frac{3x+x^2}{9-x^2}; \quad c) \frac{4x^2-1}{6x-3}; \quad d) \frac{6x+3}{12x^2-3}.$$

★★

Alege răspunsul corect!

5. Pentru $x^2 + x = 1$ valoarea raportului

$$\frac{x^4 + 2x^3 + x^2}{2x^2 + 2x}$$
 este egală cu:

A) 1,5 B) 0,6 C) 0,5 D) $-\frac{1}{2}$.

6. Pentru $x \neq -1$, raportul $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$ devine, prin simplificare:

A) $-\frac{1}{2x+1}$ B) $\frac{x-1}{x+1}$ C) $\frac{x+1}{x-1}$ D) $\frac{1}{2x}$.

●●●●▷ Alege și rezolvă în 5 minute!

A

Amplifică cu $2x-1$: a) $\frac{3}{2x}$; b) $\frac{2x+13}{x}$.

B

Simplifică: $\frac{3x^2+6x+3}{-3x-3}$.

C

Scrie în forma ireductibilă:

$$E(x) = \frac{3x^2+16x+13}{x^2-4x-5}.$$

O situație-problemă

La Târgul de carte, editurile oferă reduceri de preț. Liza a cumpărat o carte cu 20% reducere și o alta cu 30% reducere. Apoi s-a gândit că prietena ei ar dori și ea să citească aceste cărți și și-a propus să i le ofere cadou. A doua zi când a venit din nou la târg, a constatat că prima carte avea prețul redus la jumătate, iar pentru a doua, reducerea era de numai 15%. Știind că prețul inițial al ambelor cărți era același, ce procent din prețul cărților a economisit Liza a doua zi?

Vrem să știm! Cum efectuăm adunări și scăderi cu fracții algebrice?

Știm să efectuăm adunări cu **rapoarte (fracții) numerice**.

$${}^1) \frac{1}{6} + {}^2) \frac{5}{3} = \frac{1+2 \cdot 5}{6} = \frac{11}{6}$$

$${}^7) \frac{2}{15} - {}^3) \frac{4}{35} = \frac{7 \cdot 2 - 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{2}{105}$$

Folosim aceleași reguli pentru a efectua adunări și scăderi cu **rapoarte (fracții) algebrice**.

$$\frac{1}{x^2-1} + \frac{{}^{x-1}) 3}{x+1} = \frac{1+3x-3}{x^2-1} = \frac{3x-2}{x^2-1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

$$\frac{{}^{x-2}) 3}{x^2-1} - \frac{{}^{x+1}) 4}{x^2-3x+2} = \frac{-x-10}{(x^2-1)(x-2)}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1; 2\}$$

Generalizăm

Pentru **adunarea sau scăderea fracțiilor algebrice** se parcurg, în general, următoarele etape:

1. Se descompun în factori numitorii.
2. Se stabilește numitorul comun.
3. Se amplifică fiecare raport pentru a obține același numitor.
4. Se adună (scad) numărătorii și se scrie numitorul comun.
5. Se identifică mulțimea în care toate rapoartele au sens.
6. Se efectuează eventualele simplificări.

Exemple:

$$\text{a) } \frac{{}^6) 1-x}{x} + \frac{{}^{2x}) x}{3} - \frac{1+2x}{6x} = \frac{6(1-x) + 2x^2 - (1+2x)}{6x} = \frac{6-6x+2x^2-1-2x}{6x} = \frac{2x^2-8x+5}{6x}, x \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{b) } \frac{x}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{1+x}{x^2-4x+4} = \frac{{}^{(x-2)^2}) x}{(x+2)(x-2)} - \frac{{}^{(x+2)(x-2)}) 1}{(x+2)(x-2)} + \frac{{}^{x+2}) 1+x}{(x-2)^2} = \frac{x(x^2-4x+4) - (x^2-4) + x+2+x^2+2x}{(x+2)(x-2)^2} = \frac{x^3-4x^2+7x+6}{(x+2)(x-2)^2}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

Evaluăm nivelul de bază

Pentru x aparținând mulțimii de definiție a fiecărui raport, determină numitorul comun și efectuează adunarea:

a) $\frac{5}{2x-1}$ și $\frac{x}{2x+1}$;

b) $\frac{x+1}{x}$ și $\frac{x}{2x+1}$;

c) $\frac{3}{y-1}$ și $\frac{15}{1-y^2}$;

d) $\frac{x}{x-2}$ și $\frac{3}{x^2-4}$.

Probleme propuse

1. Efectuează și scrie în forma cea mai simplă (știind că x aparține mulțimii de definiție a fiecărei fracții):

a) $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; c) $\frac{1}{z+3} + \frac{1}{z-3}$; d) $\frac{3x}{x^2+x} + \frac{3}{x^2+x}$; e) $\frac{x^2}{x^2-2x} + \frac{2-3x}{x^2-2x}$;

f) $\frac{3}{14} - \frac{1}{10}$; g) $\frac{1}{\sqrt{50}} + \frac{1}{\sqrt{75}}$; h) $\frac{1}{x-5} + \frac{1}{5x-x^2}$; i) $\frac{2x+1}{x^2-2x+1} - \frac{4}{x^2-1}$; j) $\frac{3}{1-2x} - \frac{7}{1+2x} + \frac{20x-4}{4x^2-1}$.

2. Pentru x aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții, efectuează adunările:

a) $\frac{1}{3x-1} + \frac{x}{3x+1}$; b) $\frac{1}{y+1} + \frac{1}{y^2-1}$; c) $\frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{x^2+4x+4} + \frac{1}{x+2}$.

★★

3. Procedează ca în exemplu pentru a raționaliza numitorul fiecărei fracții, apoi efectuează adunarea.

Exemplu:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{3(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{3(2+\sqrt{3})}{4-3} = 3(2+\sqrt{3}) = 6+3\sqrt{3}$$

a) $\frac{2}{\sqrt{8}-\sqrt{6}} + \frac{14}{\sqrt{12}-\sqrt{5}}$;

b) $\frac{1}{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}} + \frac{5}{5\sqrt{2}-\sqrt{15}}$.

4. Calculează și scrie în forma cea mai simplă, știind că numitorii sunt nenuli, iar $a > 0$, $b > 0$.

a) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; b) $\frac{1}{a+\sqrt{b}} + \frac{1}{a-\sqrt{b}}$; c) $\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{a-b}}$.

★★★

5. Efectuează operațiile după ce scrii mulțimile în care rapoartele sunt definite.

a) $\frac{2x^2+1}{8x} + \frac{5}{2x} - \frac{x}{4}$; b) $\frac{2-x}{x-x^2} - \frac{x-2}{x^2-2x+1} + \frac{1}{1-x}$; c) $\frac{1}{x-2} - \left(\frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{2-x} \right) + 1$; d) $\frac{\sqrt{3}}{x^2-3} + \frac{1}{x+\sqrt{3}}$.

6. Calculează:

a) $\frac{7}{\sqrt{8}+1} + \frac{6}{\sqrt{11}+\sqrt{5}}$; b) $\frac{11}{3\sqrt{2}+\sqrt{7}} - \frac{6}{3\sqrt{7}+5\sqrt{3}}$; c) $\frac{3}{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}$.

★★★★

7. Simplifică, după ce ai pus condițiile necesare asupra numitorilor:

a) $\frac{2x^3+x^2+x-1}{2x^3+3x^2+3x+1}$; b) $\frac{2x^2-4x-6}{x^3-x^2-5x-3}$; c) $\frac{(x^3+x^2+x-1)(x^3+x^2+x-4)+2}{(x^3+x^2+x-2)(x^3+x^2+x-4)+1}$.



8. Alege răspunsul corect! Suma inverselor numerelor $\sqrt{2}+1$, $\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $2+\sqrt{3}$, este:

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 1 D) 2.

9. Calculează: $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$.

10. a) Arată că numărul $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$ este natural;

b) Arată că numărul $\frac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \frac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} + \frac{2-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$ este număr rațional.

●●●●▶ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

Pentru x aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții, scrie în forma cea mai simplă:

A $\frac{4}{x} + \frac{5+x}{x^2}$.

B $\frac{2x+1}{x^2-2x+1} - \frac{4}{x^2-1}$.

C $\frac{1}{x+1} - \left(\frac{x-2}{x^2-x} - \frac{x+2}{x} \right)$.

► O situație-problemă

Care este prețul inițial al unui obiect dacă, după o scumpire cu 10%, urmată de o ieftinire cu 10%, obiectul costă 5 940 lei? Nu cunoaștem prețul inițial, pe care îl putem nota cu x .
 Avem $x \cdot 110\% \cdot 90\% = 5\,940$. Pentru a afla necunoscuta, trebuie să efectuăm înmulțiri și împărțiri.

Vrem să știm! Cum efectuăm operații cu fracții algebrice?

► Să observăm!

Știm să efectuăm operații cu **rapoarte (fracții) numerice**.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$$

$$\frac{2}{3} : \frac{11}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{11} = \frac{6}{11}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8}$$

Folosim aceleași reguli pentru a efectua operații cu **rapoarte (fracții) algebrice**.

$$\frac{2x+1}{x-1} \cdot \frac{x-3}{x} = \frac{(2x+1)(x-3)}{(x-1) \cdot x} = \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$$

$$\frac{x-1}{x} : \frac{(x-1)^2}{x^3} = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{x^2}{x-1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$$

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-2} = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

► Generalizăm

Pentru **înmulțirea fracțiilor algebrice** se parcurg, în general, următoarele etape:

1. Se descompun în factori numărătorii și numitorii.
2. Se fixează mulțimea în care toate rapoartele au sens.
3. Se efectuează eventualele simplificări.
4. Se înmulțesc numărătorii între ei și numitorii între ei.

Exemple:

a) $\frac{x^4}{5x+10} \cdot \frac{30}{3x} = \frac{x^4}{5(x+2)} \cdot \frac{30}{3x} = \frac{2x^3}{x+2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$

b) $\frac{16x^2 - 8x + 1}{4x^2 - 4x} \cdot \frac{x^2 - x}{16x^2 - 1} = \frac{(4x-1)^2}{4x(x-1)} \cdot \frac{x(x-1)}{(4x-1)(4x+1)} = \frac{4x-1}{4(4x+1)}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{4}; 0; \frac{1}{4}; 1\right\}$

c) $\frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 36} \cdot \frac{x+6}{1-x^2} = \frac{(x-1)(x-6)}{(x-6)(x+6)} \cdot \frac{x+6}{(1-x)(1+x)} = -\frac{1}{x+1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-6; -1; 1; 6\}$

Pentru **împărțirea a două fracții algebrice** se înmulțește primul raport cu inversul celui de-al doilea.

Exemplu: $\frac{(5x+1)^2 - 1}{2x - x^2} : \frac{25x^2 + 20x + 4}{x^2 - 4x + 4} = \frac{5x(5x+2)}{x(2-x)} \cdot \frac{(x-2)^2}{(5x+2)^2} = \frac{-5(x-2)}{5x+2}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{5}; 0; 2\right\}$

Ridicarea la putere a unei fracții algebrice se face ca și ridicarea la putere a unui raport numeric.

Exemplu: $\left(\frac{{}^3 1}{x} - \frac{{}^x 1}{3}\right)^2 = \left(\frac{3-x}{3x}\right)^2 = \frac{(3-x)^2}{(3x)^2} = \frac{(3-x)^2}{9x^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

Avem $x \cdot \frac{110}{100} \cdot \frac{90}{100} = 5940$. Obținem $x = 6000$. Deci obiectul a avut prețul inițial de 6000 lei.

●●●●▷ Probleme propuse

★

1. Pentru variabilele aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții, calculează:

a) $\frac{3}{14} \cdot \frac{7x}{9}$; b) $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{8x}$; c) $\frac{2x}{5} \cdot \left(-\frac{10}{3x^2}\right) \cdot \frac{9x}{4}$; d) $\frac{4}{5} : \frac{2x}{35}$; e) $\frac{3}{14} : \frac{9x}{21}$; f) $\left(\frac{3x}{5y}\right)^3$; g) $\left(\frac{3x}{10y}\right)^2 : \frac{18x^2}{25y^3}$.

★★

2. Pentru variabilele aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții, efectuează înmulțirile:

a) $\frac{x^3}{4x+8} \cdot \frac{12}{3x}$; b) $\frac{2x+8}{x^2} \cdot \frac{x}{x^2-16}$; c) $\frac{x-1}{2} \cdot \frac{6}{(x-1)^2} \cdot \frac{-4}{x^2}$; d) $\frac{x^2-4}{x^2-1} \cdot \frac{x-1}{x^2+2x}$; e) $\frac{x^2-8x+7}{x^2-2x+1} \cdot \frac{1-x}{49-x^2}$;
f) $\frac{x+3}{6x^3-12x^2} \cdot \frac{4x-4x^2}{x^3+3x^2-x-3} \cdot (9x^2+9x)$; g) $\frac{2y-6}{y^2-5y+6} \cdot \frac{5y(y-2)}{4y}$; h) $\frac{25x^2-10x+1}{10x^2-2x} \cdot \frac{x^2}{25x^2-1}$.

3. Pentru variabilele aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții, efectuează împărțirile:

a) $\frac{x}{x+1} : \frac{4x^2}{x^2-1}$; b) $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) : \left(x + \frac{1}{x} - 1\right)$; c) $\frac{5x^2-1}{5x^2-2\sqrt{5}x+1} : \frac{\sqrt{5}x+1}{5x-\sqrt{5}}$; d) $\frac{3x^2+2x-1}{x^4-1} : \frac{1-9x^2}{x^4+2x^2+1}$;
e) $\frac{x^2-2x}{x^2+4x+4} : \frac{8x^2-16x}{5x+10}$; f) $\frac{x^2+2x}{(x^2-1)^2-1} : \frac{x^2+2x+1}{x^4+x^3-2x^2-2x} \cdot \frac{1}{x+2}$; g) $\frac{y^3+y^2}{4y+4} : \left(-\frac{y^2-1}{y}\right) : \left(-\frac{y^3}{2y-2}\right)$.

★★★

4. Pentru x aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții, efectuează:

a) $-3x \cdot \frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2+3x+2}$; b) $\left(\frac{4}{4-x} - \frac{4}{4+x}\right) \cdot \frac{x^2+8x+16}{x^2-16}$; c) $\left(\frac{x}{x-3} - \frac{x+1}{x+3}\right) : \frac{10x+6}{x^2-4x+3}$;
d) $\frac{x^2-4x+3}{x^2-5x+4} \cdot \frac{x^2-16}{(x-3)^2} \cdot \frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+4}$.

5. Pentru x aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții, efectuează calculele:

a) $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$; b) $\frac{\frac{9x^2-1}{9x^2}}{\frac{9x^2-6x+1}{9x^4-18x^3+9x^2}}$; c) $\frac{1}{3x-2} - \frac{1}{3x+2}$.

★★★★

6. Arată că, dacă $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ și $a+b+c=0$, atunci $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$.

●●●●▷ Alege și rezolvă în 5 minute!

Pentru variabilele aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții, scrie în forma cea mai simplă:

A $\frac{10x^3y^3}{4x} \cdot \frac{6}{2y^2}$.

B $\frac{2x+8}{x^2} \cdot \frac{x}{x^2-16}$.

C $\frac{2x-4}{x+3} : \frac{x^2-4x+4}{x^2-9}$.

●●●●▷ O situație-problemă

Mati susține că poate ghici rezultatul unor calcule făcute cu numere necunoscute. Pentru a demonstra afirmația, el i-a spus Lizei: „Să zicem că ai o anumită sumă de bani. Împrumuți de la bancă încă atâta și câștigi la loto 200 000 lei. Pierzi jumătate din suma totală, apoi trebuie să înapoiezi la bancă împrumutul și dobânda aferentă de 80 000 lei. Ți-au rămas 20 000 lei.” Cum a calculat Mati?

Vrem să știm! >>>

Cum aplicăm ordinea efectuării operațiilor în calcule cu fracții algebrice?

Definiție >>>

Fracțiile algebrice legate între ele prin operații de adunare, scădere, înmulțire, împărțire sau ridicare la putere formează **expresii algebrice raționale**.

Exemplu: $E(x) = \frac{x^2+1}{x} - \frac{x}{x-1} \cdot \frac{2}{x+1}$ este o expresie algebrică rațională.

i **Ordinea efectuării operațiilor** cu expresii algebrice raționale este cea de la operațiile cu numere reale. Trebuie să avem grijă să eliminăm acele valori ale variabilelor pentru care expresia nu este definită. Aceasta se realizează punând condiția ca **toți numitorii să fie nenuli**.

Calculul algebric ne ajută să optimizăm rezultatele. De aceea, căutăm să aducem expresiile algebrice la **forma cea mai simplă** efectuând toate calculele și simplificările posibile.

●●●●▷ Probleme rezolvate

a) Descompune în factori expresia algebrică $E(x; y) = x^2 + xy - 2y^2$.

b) Determină forma cea mai simplă a expresiei raționale:

$$F(x; y) = \left(\frac{2x}{x^2 - y^2} + \frac{1}{x+y} + \frac{2}{y-x} \right) : \left(\frac{x}{x+2y} - \frac{x}{x-y} + \frac{x^2}{x^2 + xy - 2y^2} \right)$$

c) Precizează numerele întregi a pentru care $F(2; a) \in \mathbb{Z}$.

Rezolvare: **a)** $E(x; y) = x^2 + xy - 2y^2 = x^2 + 2xy - xy - 2y^2 = x(x+2y) - y(x+2y) = (x+2y)(x-y)$.

b) Efectuăm operațiile:

$$\begin{aligned} F(x; y) &= \left(\frac{2x}{(x-y)(x+y)} + \frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{-(x-y)} \right) : \left(\frac{x-y}{x+2y} - \frac{x+2y}{x-y} + \frac{x^2}{(x+2y)(x-y)} \right) = \\ &= \frac{2x + (x-y) - 2x - 2y}{(x-y)(x+y)} : \frac{x(x-y) - x(x+2y) + x^2}{(x+2y)(x-y)} = \frac{x-3y}{(x-y)(x+y)} \cdot \frac{(x+2y)(x-y)}{x(x-3y)} = \frac{x+2y}{x(x+y)}. \end{aligned}$$

c) Egalitatea $F(x; y) = \frac{x+2y}{x(x+y)}$ are loc pentru $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, $x \neq -y$, $x \neq -2y$, $x \neq 0$, $x \neq 3y$. Deoarece

$$F(2; a) = \frac{2+2a}{2(2+a)} = \frac{1+a}{2+a} = \frac{2+a-1}{2+a} = 1 - \frac{1}{2+a}, \text{ condiția } F(2; a) \in \mathbb{Z} \text{ este echivalentă cu: } \frac{1}{2+a} \in \mathbb{Z}.$$

Din ipoteză, $a \in \mathbb{Z}$; deducem că $\frac{1}{2+a} \in \mathbb{Z}$ dacă și numai dacă $2+a \in \{1; -1\}$. Obținem: $a \in \{-1; -3\}$.

F nu are definită valoarea pentru $x = 2$, $y = -1$; de aceea, singura valoare acceptată este: $a = -3$.

●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

Notăm cu x suma de bani a Lizei. Suma de bani rămasă este: $\frac{2x + 200\,000}{2} - x - 80\,000 = 20\,000$.

Descoperă greșeala

Mati a propus colegilor săi să determine valoarea expresiei raționale $E(x) = \frac{x}{x-2} - \frac{2}{x-2}$ pentru $x = 2$. Iată răspunsurile primite:

Tic	Geo
Deoarece $E(x) = \frac{x-2}{x-2} = 1$, avem $E(2) = 1$.	$E(x)$ nu are definită valoarea pentru $x = 2$, deoarece numitorii lui E se anulează.

Cine are dreptate?

Gândim critic și constructiv!

Profesorul le-a cerut elevilor să aducă la forma cea mai simplă expresia

$$E(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{2-x}{1-x^2}. \text{ Vlad și Dana au obținut rezultatele } \frac{2x+3}{x^2-1}, \text{ respectiv } \frac{4x-1}{x^2-1}.$$

Pentru a verifica rapid rezultatele, profesorul le-a cerut să calculeze valorile numerice ale expresiei date și ale expresiilor obținute pentru $x = -2$. Care dintre rezultate este greșit? Verifică și prin aducerea expresiei $E(x)$ la forma cea mai simplă.

Probleme propuse

- Raționalizează numitorii:
 - $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$;
 - $\frac{1}{2\sqrt{3}}$;
 - $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$;
 - $\frac{6}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$.
- Simplifică, după ce ai stabilit condițiile necesare pentru numărul real x .
 - $\frac{x+1}{x^2-1}$;
 - $\frac{x-x^2}{1-x^2}$;
 - $\frac{4x^2-1}{6x-3}$;
 - $\frac{9x^2-4}{9x+6}$;
 - $\frac{25x^2-20x+4}{15x^3-6x^2}$;
 - $\frac{x^2+5x+4}{x^2-16}$.
- Scris în forma cea mai simplă, știind că variabilele aparțin mulțimii de definiție a fiecărei fracții:
 - $\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x} - \frac{1}{4x}\right) : \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x} - \frac{5}{3x}\right)$;
 - $\left(\frac{x}{3} - \frac{x+1}{y^2} : \frac{4x+4}{y^3} + \frac{x}{2}\right) : \left(\frac{5x}{6} - \frac{y}{4}\right)$.
- Scris în forma cea mai simplă expresiile, știind că variabilele aparțin mulțimii de definiție a fiecărei fracții:
 - $\left[\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + 1 + \frac{2(x+1)}{x-1}\right] \cdot \frac{(x-1)^3}{12x^2}$;
 - $\left(\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2+4x+4} - \frac{1}{x^2-4x+4}\right) \cdot \frac{(x+2)^2}{-16x^2}$;
 - $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) \cdot \frac{5x}{4x^2-1} - \frac{3}{4x^2-4x+1} : \frac{x+1}{2x-1}$;
 - $\left(\frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{2}{x^2-2x}\right) \cdot \frac{x^2-3x}{4x^2-1} - \frac{1}{2x^2-x}$;
 - $\frac{x}{(x-y)(x-z)} + \frac{y}{(y-x)(y-z)} + \frac{z}{(z-x)(z-y)}$;
 - $\left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+2} - \frac{10}{x^2-4}\right) \cdot \frac{x^2-4x+4}{x}$.
- Efectuează:
 - $\frac{x^2-4x+4}{x^2+4x+4} \cdot \frac{x+2}{x} - \frac{4x}{x+2}$;
 - $\left(\frac{3x}{x^2-9} - \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-3}\right) : \left(1 - \frac{x^2}{x^2-9}\right)$;
 - $\left(\frac{x}{x-7}\right)^2 : \left(\frac{x+7}{x}\right)^2 \cdot \frac{x^2-49}{x^2}$;
 - $\left(\frac{x}{x+4} - \frac{8x}{x^2-16} - \frac{4}{4-x}\right) : \frac{x-4}{7}$.
- Demonstrează că $\left(\frac{x+1}{x^2-1} - \frac{2x+4}{x^2+2x}\right) \cdot \frac{x^2-2x+1}{2-x} = \frac{x-1}{x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.



★★★

7. a) Arată că expresia

$$F(x) = \left[\left(1 - \frac{1}{x} \right)^2 \cdot \frac{x^2}{x^3 + 3x^2 - 4} + \frac{1}{x+2} \right] : \frac{4x^2 - 1}{2x^2 + 3x - 2}$$

are forma cea mai simplă $F(x) = \frac{1}{x+2}$.

b) Determină $x \in \mathbb{R}$ pentru care $F(x)$ nu este definită.

c) Determină $a \in \mathbb{Z}$ pentru care F este definită și $F(|a|) = \frac{1}{3}$.

8. Fie expresia

$$E(x) = \left(1 + \frac{1}{2-x} \cdot \frac{x^2 - 4x + 4}{4 - x^2} \right) : \frac{x^2 + 4x + 3}{6x^2 + 6x}$$

a) Arată că $E(x) = \frac{6x}{x+2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; -2; -1; 0; 2\}$.

b) Calculează $E(a)$ pentru $a = 1,5 + \frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}-1}$.

9. Se consideră expresia:

$$G(x) = \left(x - \frac{9}{6-x} \right) : \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{6-x-x^2} \cdot \frac{x-6}{x+3}$$

a) Arată că forma cea mai simplă a expresiei $G(x)$ este $\frac{2-x}{x+1}$.

b) Determină $x \in \mathbb{R}$ pentru care $G(x)$ nu are sens.

c) Determină $b \in \mathbb{Z}$ pentru care $G(b) \in \mathbb{Z}$.

10. Scrie expresia $\frac{2x}{x^2-1}$ ca sumă de două rapoarte algebrice, apoi ca diferență, ca produs și apoi ca raport de rapoarte algebrice.

11. a) Arată că

$$T(x) = \left[2 + x \cdot \left(\frac{0,5x-1}{x-2} \right)^2 + \frac{4}{x} \right] : \frac{4x}{x^2-16} = \frac{x+4}{x-4}$$

b) Află $x \in \mathbb{R}$ pentru care $T(x)$ are definită valoarea.

c) Determină $x \in \mathbb{N}$ pentru care $(x+4) \cdot T(x) \leq 0$.

12. a) Scrie expresia

$$H(x) = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{x} \right)^2 : \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{\sqrt{5}x^2 + 5\sqrt{5}x}{x^2 - 10x + 25}$$

în forma cea mai simplă.

b) Determină numerele reale x pentru care $H(x)$ are sens.

c) Calculează $H(1) - H(-1)$.

13. Se consideră expresia algebrică rațională:

$$E(x) = \left(\frac{2x-5}{2x+5} - \frac{5x-2}{5-2x} + \frac{27x-1}{4x^2-25} \right) : \frac{2x^2+4x+2}{2x+5}$$

a) Scrie $E(x)$ în forma cea mai simplă punând mai întâi condițiile necesare.

b) Află numerele întregi x pentru care $E(x) \in \mathbb{Z}$.

14. Determină valoarea minimă a raportului

$$E(x) = \frac{3x^2 - 12x + 13}{x^2 - 4x + 5}, x \in \mathbb{R}.$$



15. a) Verifică dacă $\frac{2x}{x^2-3x+2} = \frac{4}{x-2} - \frac{2}{x-1}$.

b) Determină numerele reale a și b pentru care expresia $\frac{a}{x-2} - \frac{b}{x-3}$ este egală cu $\frac{x-5}{x^2-5x+6}$.

★★★

16. Se consideră expresia algebrică $E(x; y; z) = \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{x^2 - y^2 + z^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{x^2 + y^2 - z^2}{(z-x)(z-y)}$.

a) Calculează $E(1; 2; 0)$ și $E(-1; 1; 0)$; b) Determină forma cea mai simplă a expresiei $E(x; y; z)$.

17. Fie x, y, z , trei numere reale cu proprietatea că $xy + xz + yz = 0$.

a) Află x, y, z , dacă $x^2 + 2yz = 0$; b) Presupunem că x, y, z sunt nenule și distincte. Demonstrează

că forma cea mai simplă a expresiei $F(x; y; z) = \frac{x^2}{x^2 + 2yz} + \frac{y^2}{y^2 + 2xz} + \frac{z^2}{z^2 + 2xy}$ este 1.

●●●●▷ Alege și rezolvă în 5 minute!

Pentru variabilele aparținând mulțimii de definiție a fiecărei expresii algebrice, scrie în forma cea mai simplă:

A $\left(\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x-1} \right) \cdot \left(x - \frac{1}{4x} \right)$

B $\frac{3}{1-2x} - \frac{7}{1+2x} + \frac{20x-4}{4x^2-1}$

C $\left(\frac{x}{x+4} - \frac{8x}{x^2-16} - \frac{4}{4-x} \right) : \frac{x-4}{7}$

► O situație-problemă

Ana și Liza au avut de rezolvat ecuația $x^2 - 2x - x + 2 = 2x - 2$.

Aplicând descompuneri în factori, au ajuns la ecuația $(x - 2)(x - 1) = 2(x - 1)$.

Iată cum au procedat mai departe:

Rezolvarea Anei	Rezolvarea Lizei
$(x - 2)(x - 1) = 2(x - 1)$ $x - 2 = 2$ $x = 4$ $S = \{4\}$	$(x - 2)(x - 1) = 2(x - 1)$ $(x - 2)(x - 1) - 2(x - 1) = 0$ $(x - 1)(x - 4) = 0$ $x - 1 = 0$ sau $x - 4 = 0$ $S = \{1; 4\}$

S-au obținut mulțimi de soluții diferite, deci una dintre eleve a greșit. În ce constă greșeala?

Rezolvare:

Verificăm soluțiile: 1 și 4 verifică ecuația dată, deci Ana a greșit. Ea a împărțit în ambii membri ai ecuației cu un factor ce conține necunoscuta.

Vrem să știm!

Cum putem rezolva o ecuație în care apar împărțiri la un factor ce conține necunoscuta?

► Ne amintim și extindem

Regula raportului nul

Un raport este nul dacă și numai dacă numărătorul său este nul (și numitorul este nenul).

Altfel spus: $\frac{a}{b} = 0$ dacă și numai dacă $a = 0$, unde $b \neq 0$.

Aplicând această regulă, putem rezolva ecuații care conțin necunoscuta la numitor.

Cum gândim	Cum scriem
Pașii de rezolvare ai ecuației:	$\frac{6x}{2x-1} = \frac{3x+1}{x}$
1 Stabilim mulțimea de definiție a ecuației.	$2x - 1 \neq 0$ și $x \neq 0$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$
2 Trecem totul în membrul I.	$\frac{6x}{2x-1} - \frac{3x+1}{x} = 0$
3 Aducem la același numitor.	$\frac{6x^2 - (2x-1)(3x+1)}{x(2x-1)} = 0$
4 Aplicăm regula raportului nul.	$6x^2 - (2x-1)(3x+1) = 0$
5 Rezolvăm ecuația obținută.	$x = -1$
6 Verificăm dacă soluția se află în mulțimea de definiție a ecuației.	$-1 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$, deci $S = \{-1\}$

●●●● ▷ **Probleme propuse**

1. Rezolvă ecuațiile următoare după ce ai determinat mulțimile lor de definiție: **a)** $\frac{1}{x} - x = 0$; **b)** $\frac{4}{x} = \frac{x}{9}$; **c)** $y^2 - 8 = 1$; **d)** $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$; **e)** $\frac{x}{x + 2} = 5$; **f)** $\frac{x^2}{x - 3} = x + 6$; **g)** $5 - y^2 = 1$; **h)** $\frac{x + 2}{3x} = \frac{x}{3x - 5}$.

★★

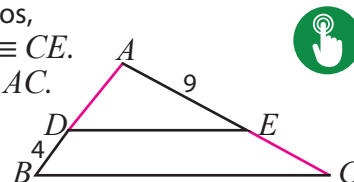
2. Sunt corecte rezolvările de mai jos?

Dacă nu, găsește greșeala!

a) $x^2 = 4$
 $\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$
 $x = 2$
 $S = \{2\}$

b) $y^2 = 9$
 $\sqrt{y^2} = \sqrt{9}$
 $y = 3$
 $S = \{3\}$

3. În figura de mai jos,
 $DE \parallel BC$ și $AD \equiv CE$.
 Calculează AB și AC .



4. Determină mulțimea de definiție pentru fiecare fracție algebrică, apoi rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\frac{x^3 - 1}{x - 1} = 1$; **b)** $\frac{1}{x - 1} = \frac{1}{x + 1}$; **c)** $\frac{1}{x - 3} = \frac{1}{x + 3}$; **d)** $\frac{2x + 3}{x} - \frac{1}{x - 2} - 2 = 0$; **e)** $\frac{x + 5}{x + 2} = \frac{x - 3}{x - 1}$;
f) $\frac{x - 3}{x + 3} + \frac{x - 2}{x + 2} = \frac{5}{6}$; **g)** $\frac{x + 3}{x} - \frac{x}{x - 3} = \frac{1 - 5x}{x(x - 3)}$; **h)** $\frac{1}{x^2 - 2x + 1} - \frac{1}{x^2 + 2x + 1} = 0$.

★★★

5. Determină mulțimea de definiție pentru fiecare fracție algebrică, apoi rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} + \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4} = 0$; **b)** $\frac{x + 3}{x^2 + 6x - 27} - \frac{x}{x^2 - 81} = 0$; **c)** $\frac{4x^2 - 20x + 25}{25x^2 - 20x + 4} \cdot \frac{25x^2 - 4}{4x^2 - 25} = 0$.

Există și alte ecuații care nu sunt de gradul al doilea, dar au două soluții. Observă exemplele de mai jos.

Exemple:

Cum se rezolvă ecuațiile $|x - 3| = 2$ și $|x + 1| = |2x - 1|$?

$ x - 3 = 2$		$ x + 1 = 2x - 1 $	
Cum gândim	Cum scriem	Cum gândim	Cum scriem
1. Dacă modulul unui număr este 2, atunci numărul este 2 sau -2.	$x - 3 = 2$ sau $x - 3 = -2$	1. Dacă două numere au același modul, ele sunt egale sau opuse.	$x + 1 = 2x - 1$ sau $x + 1 = -(2x - 1)$
2. Rezolvăm fiecare ecuație.	$x = 5$ sau $x = 1$	2. Rezolvăm fiecare ecuație.	$x = 2$ sau $x = 0$
3. Reunim mulțimile de soluții.	$S = \{5\} \cup \{1\}$ $S = \{5; 1\}$	3. Reunim mulțimile de soluții.	$S = \{2\} \cup \{0\}$ $S = \{2; 0\}$

6. Rezolvă ecuațiile în $\mathbb{R}$.

a) $|x| = 2$; **b)** $|x - 1| = |x + 1|$; **c)** $|x + 2| + |y - 3| = 0$; **d)** $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 5$.

7. Rezolvă ecuațiile.

a) $|3x + 2| = 5$; **b)** $\sqrt{2z + 1} = 5$; **c)** $\sqrt{(x + 2)^2} = 1$; **d)** $|y - 3| = |2y + 1|$; **e)** $\sqrt{9 - 6x + x^2} = 2$.

●●●● ▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

Rezolvă ecuația în $\mathbb{R}$:

A $1 + \frac{2x - 1}{3} = \frac{x + 1}{6}$

B $1 + \frac{2x - 1}{3} = \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

C $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + x^2 + 4 = 4x$

●●●●▷ O situație-problemă

Profitul unei firme a crescut în doi ani cu 92%. Analiza financiară a rezultatelor arată că, în al doilea an, profitul s-a triplat în comparație cu primul an.

Cu cât la sută a crescut profitul în primul an?

Notăm cu $x\%$ creșterea din primul an și cu S suma realizată în anul precedent studiului.

După primul an, încasările au fost $S + \frac{x}{100}S = S\left(1 + \frac{x}{100}\right)$; analog, încasările după doi ani au fost $S\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 + \frac{3x}{100}\right)$.

Obținem ecuația $S\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 + \frac{3x}{100}\right) = S\frac{192}{100} \Leftrightarrow (1 + 0,01x)(1 + 0,03x) = 1,92$.



Vrem să știm!

Care sunt tipurile de aplicații care se rezolvă prin ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$?

●●●●▷ Rezolvări comparative

Ana și Dana au avut de rezolvat următoarea ecuație: $\frac{(x-2)(x-4)}{x^2 - 13x + 22} = 2$. Iată soluțiile lor.

Ana	Dana
$x^2 - 13x + 22 = x^2 - 2x - 11x + 22 =$ $= (x^2 - 2x) - (11x - 22) = x(x-2) - 11(x-2) =$ $= (x-11)(x-2)$ Ecuația devine $\frac{(x-2)(x-4)}{(x-11)(x-2)} = 2, x \in \mathbb{R} \setminus \{2; 11\}$. După simplificarea cu $x-2$ obținem $\frac{x-4}{x-11} = 2$, de unde $x-4 = 2x-22$; $x = 18 \in \mathbb{R} \setminus \{2; 11\}$.	$\frac{(x-2)(x-4)}{x^2 - 13x + 22} = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 13x + 22} = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 2(x^2 - 13x + 22) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x^2 - 26x + 44 - x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 - 20x + 36 = 0$ $a = 1, b = -20, c = 36, \Delta = (-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 256$. $x_1 = \frac{20+16}{2} = 18$ care convine; $x_2 = \frac{20-16}{2} = 2$ care anulează numitorul membrului stâng. În concluzie, soluția ecuației este 18.

●●●●▷ Exprimare orală

Ambele rezolvări de mai sus sunt corecte. Descrie etapele în fiecare caz.

●●●●▷ Să observăm!

Numitorul putea fi descompus în factori și exprimându-l ca diferență de pătrate:

$$x^2 - 13x + 22 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{13}{2} + \left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{13}{2}\right)^2 + 22 = \left(x - \frac{13}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} = \left(x - \frac{13}{2} - \frac{9}{2}\right)\left(x - \frac{13}{2} + \frac{9}{2}\right) = (x-11)(x-2)$$

În continuare, ecuația se rezolvă la fel.

●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

Efectuăm produsele și înmulțim ambii membri ai ecuației cu 10 000. Obținem ecuația

$3x^2 + 400x - 9200 = 0$, cu soluțiile $x_1 = 20$, $x_2 = -\frac{920}{6}$. Excludem soluția $x_2 = -\frac{920}{6}$, deoarece nu satisface datele problemei, fiind negativă. În concluzie, profitul a crescut în primul an cu 20%.

Extindem

Am văzut că, pentru a rezolva o ecuație de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde a, b, c sunt numere reale, $a \neq 0$, căutăm să obținem diferențe de pătrate:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad | :a, \quad a \neq 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

Notăm expresia $b^2 - 4ac$ cu litera grecească Δ (citim delta). $\Delta = b^2 - 4ac$.

Teoremă Ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, are soluții reale dacă și numai dacă $\Delta \geq 0$.

Demonstrație:

Ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ este echivalentă cu ecuația $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$. Această ecuație are soluții reale dacă și numai dacă $\frac{\Delta}{4a^2} \geq 0$. Deoarece $4a^2 > 0$, relația $\frac{\Delta}{4a^2} \geq 0$ este echivalentă cu $\Delta \geq 0$.

În concluzie:

Pentru a rezolva o ecuație de forma $ax^2 + bx + c = 0$, cu $x \in \mathbb{R}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) procedăm astfel: Calculăm $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Dacă $\Delta < 0$, atunci $S = \emptyset$
- Dacă $\Delta = 0$, atunci $S = -\frac{b}{2a}$.
- Dacă $\Delta > 0$, atunci $S = \left\{ \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$. În acest caz, scriem pe scurt soluțiile sub forma: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Probleme rezolvate

1. Câte soluții reale are ecuația $x^2 - x - 6 = 0$ și care sunt acestea?

Rezolvare: Calculăm $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$. Deoarece $\Delta > 0$, ecuația are două soluții reale.

$$\text{Avem } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}. \text{ Rezultă } x_1 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ și } x_2 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2.$$

$$\text{Observăm că ambele soluții verifică ecuația: } 3^2 - 3 - 6 = 9 - 9 = 0 \\ (-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$$

2. Pentru fiecare număr real m considerăm ecuația $x^2 - 2mx + m - \frac{1}{4} = 0$. Demonstrează că ecuația are soluții reale, oricare ar fi numărul real m și că una dintre soluții nu depinde de m .

Rezolvare: $a = 1, b = -2m, c = m - \frac{1}{4}$ și $\Delta = (-2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(m - \frac{1}{4}\right) = 4m^2 - 4m + 1 = (2m - 1)^2$. Oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$, $(2m - 1)^2 \geq 0$, deci $\Delta \geq 0$ și ecuația are soluții reale $\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2m \pm \sqrt{(2m - 1)^2}}{2} = \frac{2m \pm (2m - 1)}{2}$ și una dintre soluții este $\frac{2m - 2m + 1}{2} = \frac{1}{2}$ care nu depinde de m .

Compară rezolvarea ecuațiilor de gradul al doilea prin cele două metode:

1. folosind descompunerea în factori a unei diferențe de pătrate
2. aplicând formulele de calcul

Identifică avantajele fiecărei metode.



Gândim critic
și constructiv!

●●●●▷ **Probleme propuse**

★

1. Rezolvă ecuațiile:

- a) $x^2 - 4x - 1 = 0$; b) $x^2 + 4x - 1 = 0$;
c) $-2x^2 + x + 1 = 0$; d) $-2x^2 - x + 1 = 0$;
e) $x^2 + x + 0,25 = 0$; f) $x^2 - x + 0,25 = 0$.

2. Stabilește dacă ecuațiile următoare au mulțimile de soluții indicate:

- a) $x^2 - 4 = 0$; $S = \{2\}$; b) $9x^2 - 1 = 0$; $S = \left\{\pm \frac{1}{3}\right\}$;
c) $-x^2 + 25 = 0$; $S = \{\pm 5\}$; d) $x^2 + 1 = 0$; $S = \{-1\}$;
e) $-x^2 - 9 = 0$; $S = \emptyset$; f) $\sqrt{3}x^2 - 3\sqrt{3} = 0$; $S = \mathbb{R}$.

★★

4. Explică de ce următoarele ecuații nu au soluții:

- a) $x^2 = -1$; b) $4x^2 - 4x + 1 = -6$;
c) $x^2 = 1 - \sqrt{3}$; d) $10(x - 4)^2 + 7 = 0$.

5. Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

- a) $x^2 - 2x + 1 = 0$; b) $9x^2 + 6x = -1$; c) $(x + 1)^2 = 25$;
d) $(x - 1)^2 - 9 = 0$; e) $(4x + 1)^2 - (3x - 1)^2 = 0$;
f) $(x + 3)^2 = (x - 5)^2$; g) $(3x - 2)^2 = (x - 1)^2$;
h) $(2x - 1)^2 + (2x + 4)^2 + 8 = 0$.

6. Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

- a) $(2x + 1)^2 + 4x^2 - 1 = 0$; b) $(x + 3)(3 - x) = (x + 3)^2$;
c) $(x - 2)^2 + (x^2 - 4) = 0$; d) $(2x + 1)^2 - 1 = 0$.

★★★

8. Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

- a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 1$; b) $\frac{1}{x-2} = \frac{2x}{x^2-4}$;
c) $\frac{x+4}{3} = \frac{3}{x-4}$; d) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{4x}{x^2-1}$;
e) $\frac{6x}{x-1} = \frac{x-3}{x+1}$; f) $\frac{x+3}{x-1} + \frac{x-3}{x+1} = \frac{21}{10}$.

3. Asociază fiecărei ecuații enunțul potrivit, apoi află numerele necunoscute:

- ① $x(x + 1) = 42$; ② $3x - x = x^2 + 1$;
③ $(2x - 1)^2 + (2x + 1)^2 = 74$.

- a) Suma pătratelor a două numere impare consecutive este egală cu 74.
b) Produsul a două numere care diferă printr-o unitate este egal cu 42.
c) Diferența dintre triplul unui număr și numărul inițial este mai mare cu o unitate decât pătratul numărului.

7. Rezolvă ecuațiile, după ce ai menționat mulțimile pe care sunt definite fracțiile:

- a) $\frac{x^2 - 16}{x^2 + 4x + 4} = 0$; b) $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 4x + 4} = 0$;
c) $\frac{x^2 + x}{x^2 + 11x + 10} = 0$; d) $\frac{3x^2 - 5x + 2}{3x^2 + 10x - 13} = 0$;
e) $\frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 6x + 8} = 0$; f) $\frac{x^2 - 2}{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2} = 0$;
g) $\frac{2x^2 - x - 1}{-3x^2 + x + 2} = 0$; h) $\frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 1} = 0$.

9. Lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic sunt trei numere naturale consecutive. Determină aceste lungimi.

10. Prețul inițial al transportului pentru o excursie este de 3000 lei. Dacă se mai înscriu încă 3 persoane, fiecare participant plătește cu 50 de lei mai puțin. Determină câți participanți au fost în final și cât a plătit fiecare.

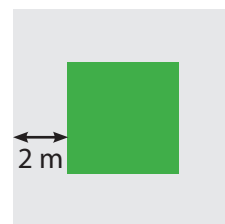


★★★★

11. Într-o rezervație naturală, populația de urși (P) se dezvoltă conform modelului:

$P(t) = -2t^2 + 16t + 40$, unde t reprezintă timpul. În cât timp, populația va scădea la 0?

12. Pentru promovarea unui nou tip de dale se pavează o alee cu lățimea constantă de 2 m în jurul unui spațiu verde în formă de pătrat. Ce arie are aleea pavată, dacă aria suprafeței acoperite cu gazon trebuie să fie o treime din aria pavată?



●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A

Rezolvă ecuațiile:

- a) $4x^2 - 25 = 0$;
b) $4x^2 - 20x + 25 = 0$.

B

Dacă a este soluție a ecuației $x^2 - x - \sqrt{2} = 0$, calculează:

- a) $a^2 - a$; b) $a - \frac{\sqrt{2}}{a}$.

C

După două reduceri consecutive identice, prețul unui obiect a scăzut de la 100 lei la 81 lei. Cu cât la sută a fost făcută fiecare reducere?

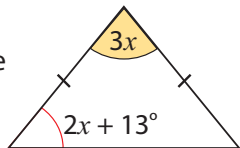
●●●●▷ Recapitulăm prin probleme

1. Determină mulțimea de definiție pentru fiecare fracție apoi scrie în forma ireductibilă:

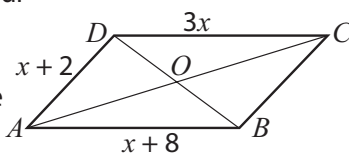
a) $\frac{2x^2y^3}{3xy^3}$; b) $\frac{x^3y}{3xy^4}$; c) $\frac{x^3}{x(x-1)}$.

★★

3. Determină unghiurile triunghiului, folosind datele și convențiile din desen.



4. Determină perimetrul paralelogramului, știind că lungimile date sunt exprimate în centimetri.



5. Determină mulțimea de definiție a expresiei $E(x)$ și scrie $E(x)$ în formă ireductibilă.

$$E(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4x + 4} - \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x + 2}$$

★★★

8. Raționalizează numitorii următoarelor fracții:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{9}{2\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}, \frac{4}{-1 + \sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{10} + 3\sqrt{6}}.$$

9. Determină numărul real x din proporția

$$\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{x} = \frac{2}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}.$$

10. Fie $E(a) = \left(\frac{2a}{a+1} + \frac{a}{a-1} - \frac{2}{a^2-1} \right) : \frac{4-9a^2}{6a-9a^2}$.

a) Arată că $E(a) = \frac{3a}{a+1}$;

b) Determină $a \in \mathbb{R}$ pentru care $E(a)$ are sens;

c) Determină $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(a) \in \mathbb{Z}$.

11. Arată că, pentru orice număr x , $x \in \mathbb{R}$, are loc

$$\text{inegalitatea: } x^4 - 2x^2 - 3x + \frac{9}{2} \geq 0.$$

★★★★

13. Pentru ce valori ale numărului real a ecuațiile următoare au o singură soluție reală?

a) $x^2 - ax + 1 = 0$;

b) $x^2 - ax + a - 1 = 0$.

2. Pentru x aparținând mulțimii de definiție a fiecărei fracții algebrice, efectuează:

a) $\frac{5}{x-1} - \frac{7}{x+1}$; b) $\frac{x}{x-2} \cdot \frac{2x-4}{x-1}$; c) $\left(\frac{3x^2}{2y^2} \right)^3 : \left(\frac{x^4}{y^3} \right)^2$.

6. Timpul de deplasare a unui mobil se determină cu formula $t = \frac{d}{v}$, unde d este distanța, iar v este

viteza medie. În cât timp parcurge un autoturism distanța de la București la Cluj, de 459 km, dacă se deplasează cu o viteză medie de 81 km/h?

7. Rezolvă ecuațiile și precizează mulțimile lor de definiție:

a) $x^2 + 3x = 0$;

e) $\frac{2x+1}{4x^2-1} = 5$;

b) $9x^2 - 4 = 0$;

c) $x^2 + 3x - 2 = 0$;

f) $\frac{x^2-4}{x+2} - 1 = \frac{x}{4}$.

d) $9x^2 + 2x - 4 = 0$;

12. **Investigație.** Energia cinetică este forma de energie asociată cu mișcarea unui obiect. Se definește ca fiind energia pe care o are un corp datorită vitezei sale. Formula pentru energia cinetică a unui obiect este $E_c = \frac{mv^2}{2}$ unde: E_c este energia cinetică, m este masa obiectului (în kg), v este viteza obiectului (în m/s). Astfel, cu cât masa sau viteza unui obiect este mai mare, cu atât energia sa cinetică este mai mare, crescând cu pătratul vitezei. *Determină energia cinetică în cazurile de mai jos, compară rezultatele și formulează o concluzie.*

a) un camion cu masa de 8 000 kg care se deplasează cu viteza medie de 45 km/h;

b) un automobil cu masa de 3 000 kg care se deplasează cu viteza medie de 60 km/h;

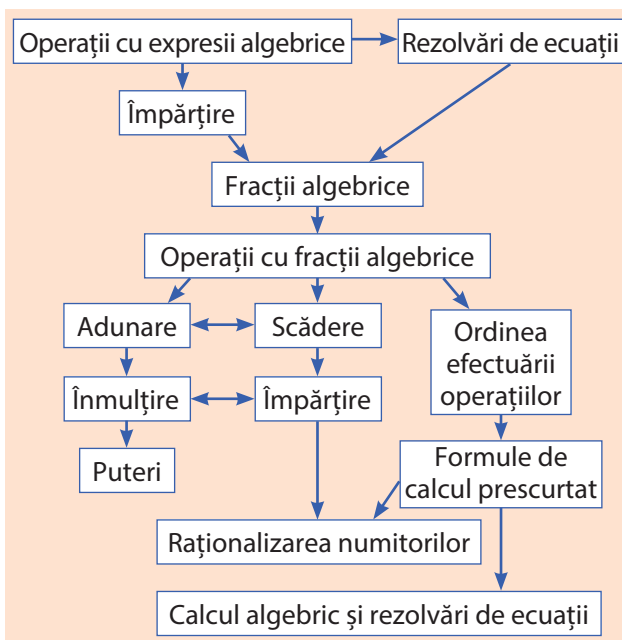
c) un automobil cu masa de 3 000 kg care se deplasează cu viteza de 120 km/h.

14. Fie $F(x) = \frac{(x^2 + x + 1)^2 - 3(x^2 + x + 1) + 2}{x^3 + 2x^2 - 1}$.

Demonstrează că $F(2^{2000}) = 2^{2000}$.

Ce am învățat?

i



●●●● ▷ Rezolv testele pentru a verifica dacă pot:

- să efectuez calcule cu numere reale reprezentate prin litere
- să aplic formule de calcul prescurtat în expresii algebrice
- să efectuez operații cu fracții algebrice, aplicând tehnici de scriere în forma cea mai simplă
- să rezolv ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$ și ecuații reducibile la acestea
- să modelez matematic probleme cu caracter practic, cu ajutorul ecuațiilor studiate.

●●●● ▷ Testul 1

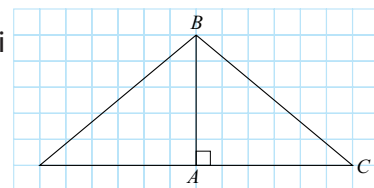
1. Efectuează: $\frac{2ab^2}{ab} : \frac{4ab}{ab^3}$.
2. Descompune numărătorul și numitorul, apoi simplifică fracția algebrică: $\frac{4x^2 + 4x + 1}{1 - 4x^2}$.
3. Determină mulțimea de definiție a expresiei și scrie $F(x)$ în forma cea mai simplă.

$$F(x) = \left[\left(1 - \frac{1}{x} \right)^2 \cdot \frac{x^2}{x^3 + 3x^2 - 4} + \frac{1}{x + 2} \right] : \frac{4x^2 - 1}{2x^2 + 3x - 2}$$
4. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile:
 - a) $x^2 + 4x = 0$;
 - b) $4x^2 - 4x + 1 = 0$;
 - c) $(x + 2)^2 - 3(x - 1) - 9 = 0$.
5. Lungimea unei camere în formă de dreptunghi este cu 4 m mai mare decât lățimea sa, iar un dulap așezat în cameră are baza pătrat, cu latura jumătate din lățimea camerei. Află dimensiunile camerei, știind că suprafața neocupată de dulap are 51 m^2 .

●●●● ▷ Testul 2

1. Efectuează: $\frac{a}{a+b} : \frac{ab}{a^2 - b^2}$.
2. Descompune numărătorul și numitorul, apoi simplifică fracția algebrică: $\frac{9x^2 + 6x + 1}{1 - 9x^2}$.
3. Determină mulțimea de definiție a expresiei și scrie $E(x)$ în forma cea mai simplă.

$$E(x) = \left(1 + \frac{1}{2-x} \cdot \frac{x^2 - 4x + 4}{4 - x^2} \right) : \frac{x^2 + 4x + 3}{6x^2 + 6x}$$
4. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile:
 - a) $4x^2 - 1 = 0$;
 - b) $2x^2 - x + 3 = 0$;
 - c) $(3x + 1)^2 - (x + 2)^2 = 0$.
5. Desenul reprezintă o schiță a structurii de rezistență a acoperișului unei cabane. Grinda BC are 7,5 m, iar grinda AC trebuie să fie cu 1,5 m mai lungă decât AB . Ce lungimi au grinzile AB și AC ?





Proiect: Turism și reprezentări

Plan de lucru

➡ **Scop:** Veți realiza un poster conținând reprezentări grafice corelate cu diferite raportări statistice din turismul românesc.

➡ **Materiale necesare:** coală A3, coli A4, riglă, creioane colorate, resurse Internet.

Realizarea proiectului

Lucrați în echipe de trei, patru sau cinci colegi.

➡ Observați diagramele alăturate, reprezentând numărul de turiști (exprimat în mii) din câteva județe, în ani diferiți.

➡ Identificați din diverse surse și alte date și transpuneți-le în grafice cu bare, cu linii, sau grafice circulare. Puteți apela la <http://www.insse.ro/cms/ro/tags/turismul-romaniei>.

➡ Adăugați câteva fraze care să descrie fiecare reprezentare.

➡ Interpretați datele folosind indicatorii statistici studiați.

Pentru început:

➡ Observați cele două diagrame și adresați colegilor întrebări privind aceste grafice. De exemplu: „Câte mii de turiști au vizitat județul Cluj în 2022? dar în 2023?”

➡ Comparați datele și formulați cel puțin două asemănări și două deosebiri între situațiile din cei doi ani.



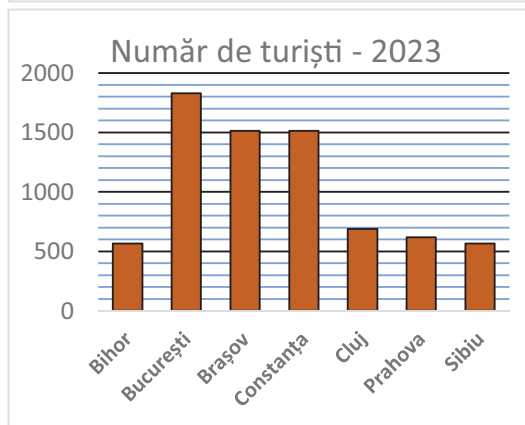
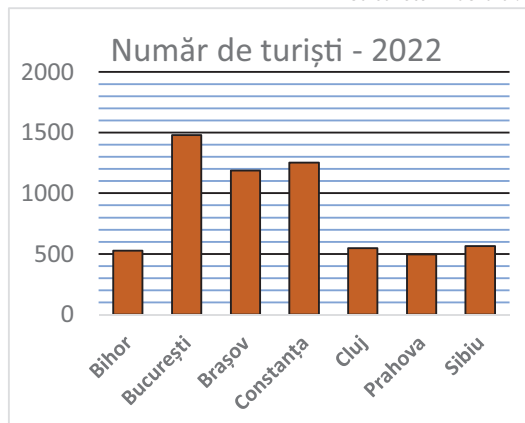
Interacționați în echipa voastră, realizați posterul, apoi **prezentați** în clasă rezultatele proiectului.

Autoevaluare

➡ Rezolvă problemele și alege răspunsurile corecte, pentru a verifica ce știi la început de unitate de învățare.



Sursa foto – Adevărul.ro



1. Soluția ecuației $3x + 9 = 0$ este:

- A) -9 B) -3 C) -12 D) 6

2. Care dintre următoarele perechi de numere nu aparține produsului cartezian al mulțimilor $D = \{1; 3; 4\}$ și $E = \{2; 4; 5\}$?

- A) (2; 3) B) (1; 4) C) (4; 4) D) (3; 2)

3. Scrierea sub formă de interval a mulțimii

$A = \{x \in \mathbb{R} | 2 \leq 2x < 4\}$ este:

- A) [2; 4) B) (2; 4) C) [1; 4) D) [1; 2)

4. În tabel sunt scrise mediile la matematică.

Media	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi	1	3	4	9	5	2

Numărul elevilor cu medii peste 7,50 este:

- A) 25 B) 9 C) 16 D) 8

5. Soluția sistemului $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ este:

- A) (4; 1) B) (2; 0) C) (-1; 6) D) (3; 2)

Ce știi deja? Verific!

Test de (auto)evaluare

Timp de lucru: 45 minute

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni și rezultate necesare pentru parcurgerea acestei Unități de învățare. Fiecare problemă propusă valorează 1 punct. Se acordă 1 punct din oficiu.

- I. Scrie pe foaia de rezolvare cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate:

Intervale

1. Scrierea sub formă de interval a mulțimii $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\}$ este ...

Produs cartezian
de mulțimi

2. Produsul cartezian al mulțimilor $A = \{0; 1\}$ și $B = \{2; 3; 4\}$ este ...

Interpretarea
unei dependențe
funcționale

3. În tabelul de mai jos sunt scrise notele la testul de matematică obținute de elevii unei clase.

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi	1	2	4	6	9	3	3

Cei mai mulți elevi au obținut nota ...

- II. Scrie pe foaia de rezolvare litera corespunzătoare răspunsului corect pentru următoarele exerciții:

Ecuatii de forma
 $ax + b = 0$

4. Soluția ecuației $3x - 1 = 0$ este:

A. 3; B. -3; C. $\frac{1}{3}$; D. $-\frac{1}{3}$.

Modulul unui
număr real

5. Modulul numărului $\sqrt{3} - 2$ este:

A. $\sqrt{3} - 2$; B. $\sqrt{3} + 2$; C. $-\sqrt{3} - 2$; D. $-\sqrt{3} + 2$.

Sisteme de două
ecuații liniare cu
două necunoscute

6. Soluția sistemului $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -x + 4y = -5 \end{cases}$ este:

A. (1; 1); B. (-1; 1); C. (1; -1); D. (1; 0).

- III. Scrie pe foaia de rezolvare soluțiile complete ale exercițiilor următoare:

Sistem de axe
ortogonale

7. Reprezintă într-un sistem de axe ortogonale punctele $A(-2; 0)$, $B(0; 3)$ și $C(4; 1)$ și ordonează crescător lungimile laturilor triunghiului ABC .

Diagrame
circulare

8. Într-o clasă, sunt 3 elevi care au înălțimea între 1,40 m și 1,49 m, 12 elevi între 1,50 m și 1,59 m, 10 elevi între 1,60 m și 1,69 m, 4 elevi între 1,70 m și 1,79 m și 2 elevi între 1,80 m și 1,89 m. Alcătuieste un tabel în care să înregistrezi aceste date și desenează diagrama circulară corespunzătoare.

Reprezentarea
grafică a
dependențelor
funcționale

9. Un vehicul se deplasează cu viteza constantă de 25 km/h. Notează într-un tabel distanța parcursă de vehicul după: o oră, 2 ore, 3 ore, ..., 8 ore și reprezintă dependența timp – distanță într-un sistem de axe.

Dacă ai obținut mai puțin de jumătate din punctaj la acest test, este util să revezi definițiile și proprietățile conceptelor menționate mai sus, pentru a înțelege mai bine ceea ce urmează.

Lecția 1

Ce înțelegem printr-o funcție?

► O situație-problemă

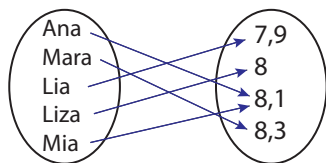
La proba de alergare, fetele din echipa de atletism a clasei au terminat cursa astfel: Ana și Mia în 8,1 secunde, Mara în 8,3 secunde, Lia în 7,9 secunde și Liza în 8 secunde. Mati susține că asocierea: *nume - timp de alergare* definește o funcție.

Vrem să știm! ► Ce este o funcție? În ce caz o asociere între elementele a două mulțimi este o funcție?

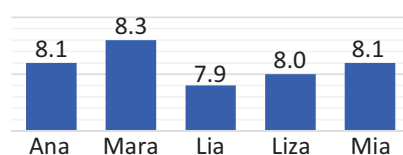
► Să ne amintim

Putem descrie asocieri între elementele a două mulțimi în diferite moduri.

Diagrame cu săgeți



Grafice cu bare



Tabele

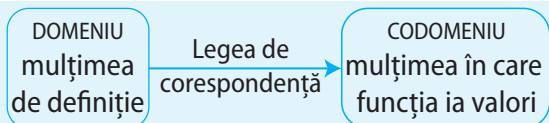
Nume	Ana	Mara	Lia	Liza	Mia
Timp	8,1"	8,3"	7,9"	8"	8,1"

Definim:

O **funcție** exprimă asocierea dintre elementele a două mulțimi, prin care **fiecărui** element din prima mulțime îi corespunde **un singur** element din a doua mulțime. Prima mulțime se numește **domeniu de definiție** (sau **mulțime de definiție**), iar a doua mulțime se numește **codomeniu** (sau **mulțimea în care funcția ia valori**).

Reprezentăm

O funcție este caracterizată de tripletul următor:



Notăm

$$f: A \rightarrow B$$

$$f(x) = y$$

sau

$$x \mapsto f(x)$$

Citim

funcția f definită pe A cu valori în B , f de x este egal cu y

elementului x din A îi corespunde elementul $f(x)$ din B

► Problemă rezolvată

Observă tabelul alăturat, în care sunt precizate câteva valori ale funcției f .

x	0	1	2	3	...	18	19	20
$f(x)$	1	3	5	7	...			

a) Determină o formulă prin care poate fi exprimată funcția f .

b) Completează cele trei celule libere din tabel.

c) Precizează domeniul de definiție și un codomeniu al funcției f .

Rezolvare:

a) Observăm că $f(0) = 2 \cdot 0 + 1$, $f(1) = 2 \cdot 1 + 1$, $f(2) = 2 \cdot 2 + 1$. De aceea, o formulă pentru funcția dată este $f(x) = 2x + 1$.

b) $f(18) = 2 \cdot 18 + 1 = 37$, $f(19) = 2 \cdot 19 + 1 = 39$, $f(20) = 2 \cdot 20 + 1 = 41$.

c) Domeniul de definiție al funcției este $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots; 20\}$, iar un codomeniu al ei (pentru formula propusă) este $\{1; 3; 5; 7; 9; 11; \dots; 41\}$.

► Evaluăm nivelul de bază

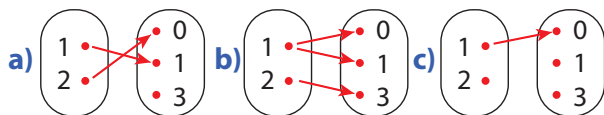
Se consideră funcția $f: \{0; 2; 4; 6\} \rightarrow \{0; 4; 8; 12\}$, $f(x) = 2x$. Calculează $f(0)$ și $f(6)$.

Procesul de multiplicare a unor pagini la copiator poate fi gândit ca o funcție. Descrie o astfel de funcție precizând cele trei elemente.

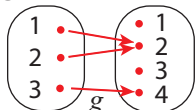
Gândim critic și constructiv!

●●●●► **Probleme propuse**

★ **1. Alege răspunsul corect!** Care dintre diagramele de mai jos descrie o funcție? Justifică!



★ **2. Diagrama descrie funcția g . Scrie domeniul și codomeniul lui g , apoi determină $g(2)$ și $g(3)$.**



★★ **5. Care dintre tabelele următoare descrie o funcție?**

a)

x	0	-1	3
y	2	4	4

b)

x	0	2	0
y	1	4	6

★★ **6. Elevii au propus exemple de funcții. Cine a greșit? Explică răspunsul tău!**

a) Ana — $f: \{0; 1; 2\} \rightarrow \{0; 1\}$, $f(x) = x^2$.

b) Geo — $g: \{0; 1; 2\} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(x) = x^2$.

c) Mati — $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{x}$.

★★★ **8. Fie funcția $a: \{2; 4; 6\} \rightarrow \mathbb{R}$, unde $a(x)$ este aria hexagonului regulat de latură x .**

- a) Calculează $a(2)$.
- b) Determină mulțimea valorilor funcției.

★★★★ **10. Investigație.** Pentru numărul natural n , notăm $u(n)$ = ultima cifră a numărului n^4 .

a) Completează tabelul:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u(n)$										

- b) Scrie două observații despre numerele completate în tabel.
- c) Demonstrează că $u(n) = u(n + 10)$.
- d) Fără a face alte calcule, explică de ce numărul 2085139 nu poate fi puterea a 4-a a unui număr natural.

★ **3. Pentru funcția $f: [0; 3] \rightarrow [0; 9]$, $f(x) = x^2$, calculează $f(0)$, $f(\sqrt{2})$ și $f(\sqrt{3})$.**

★ **4. Descrie printr-o diagramă, apoi printr-un tabel, funcțiile:**

- a) $f: \{1; 2; 3\} \rightarrow \{2; 4; 6; 8\}$, $f(x) = 2x + 2$;
- b) $g: \{-1; 0; 1\} \rightarrow \{0; 1; 2\}$, $g(t) = t^2$;
- c) $h: \{-1; 0; 1\} \rightarrow \{0; 1; 2\}$, $h(m) = m + 1$;
- d) $p: \{-1; 0; 1\} \rightarrow \{-1; 1; 3\}$, $p(n) = 2n + 1$.

★ **7. Tabelul următor definește funcția notată g .**

x	-1	0	-2	1	2
$g(x)$	2	1	3	2	3

- a) Scrie domeniul de definiție al funcției g .
- b) Care dintre următoarele mulțimi ar putea fi codomeniul lui g ?
 $M = \{0; 1; 2; 3\}$; $P = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$; $\mathbb{Q}$.
- c) Liza susține că $g(x) = |x| + 1$; are dreptate? De ce?

★ **9. Determină toate numerele $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pentru care asocierile următoare descriu funcții:**

- a) $t: \{1; 2\} \rightarrow \{5; 9\}$, $t(x) = ax + 1$;
- b) $u: \{1; 2; 3\} \rightarrow \{0; b; c\}$, $u(x) = x - d$.

★ **11. Considerăm funcția $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, unde $f(n)$ este numărul divizorilor naturali ai lui n .**

- a) Calculează $f(2)$, $f(4)$ și $f(2\,000)$.
- b) Caracterizează numerele n pentru care $f(n) = 2$, apoi pe cele pentru care $f(n) = 3$.
- c) Demonstrează că, pentru orice $t \in \mathbb{N}^*$, există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f(n) = t$.
- d) Determină cel mai mic număr natural m pentru care $f(m) = 25$.
- e) Demonstrează că dacă $f(m) = 2025$, atunci m nu poate fi cubul unui număr natural.

●●●●► **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A

Desenează diagrama cu săgeți care descrie funcția $f: \{-1; 0; 1\} \rightarrow \{a; b; c\}$, $f(-1) = c$, $f(0) = a$ și $f(1) = b$.

B

Determină mulțimea valorilor funcției $l: \{1; 1,5; 2; 2,5\} \rightarrow \mathbb{R}$, $l(x) = \text{lungimea cercului de rază } x$.

C

Propune numere naturale a și b , astfel ca asocierea $x \mapsto 2x + 1$ să definească o funcție între elementele mulțimilor $\{\sqrt{2}; \sqrt{3}\}$ și $[a; b]$.

Lecția 2 Graficul unei funcții

●●●●▷ O situație-problemă

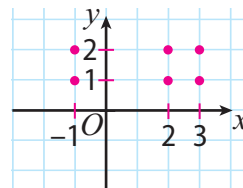
Tic a calculat perimetrele a trei triunghiuri echilaterale cu lungimile laturilor de 1 cm, 2 cm și 3 cm. El a observat că formula de calcul a perimetrului definește, de fapt, funcția $p : \{1; 2; 3\} \rightarrow \{3; 6; 9\}$, $p(l) = 3l$. Tic dorește să ilustreze printr-un desen această funcție.

Vrem să știm! >>> Ce este graficul unei funcții? Cum îl putem reprezenta printr-un desen?

●●●●▷ Să ne amintim

Produsul cartezian a două mulțimi A și B este mulțimea $A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \text{ și } y \in B\}$.

Dacă A și B sunt mulțimi de numere reale, atunci produsul lor cartezian poate fi reprezentat într-un sistem de axe ortogonale. De exemplu, produsul cartezian al mulțimilor $A = \{-1; 2; 3\}$ și $B = \{1; 2\}$ este reprezentat grafic prin cele 6 puncte evidențiate în imaginea alăturată,



Definiție >>>

Graficul unei funcții $f : D \rightarrow C$ este mulțimea formată din toate perechile $(a; b)$ unde $a \in D$, $b \in C$ și $f(a) = b$.

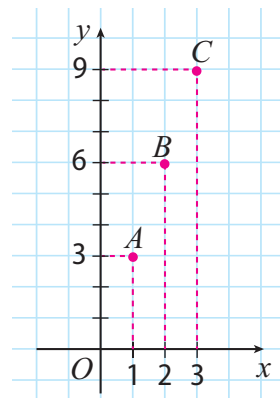
Notăm $G_f = \{(a; b) \mid (a; b) \in D \times C, f(a) = b\}$

Dacă f este o **funcție numerică**, adică dacă elementele mulțimilor D și C sunt numere reale, atunci putem obține **reprezentarea geometrică a graficului funcției**, într-un sistem de axe ortogonale. Pentru a prescurta exprimarea, numim tot grafic al funcției reprezentarea geometrică a acesteia.

●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

Graficul funcției p este $G_p = \{(1; 3), (2; 6), (3; 9)\}$. Fiecare pereche de numere din G_p determină, într-un sistem de axe ortogonale, un punct din plan; obținem astfel punctele $A(1; 3)$, $B(2; 6)$ și $C(3; 9)$.

Reprezentarea geometrică a graficului funcției p este formată din punctele A, B, C din imaginea alăturată.

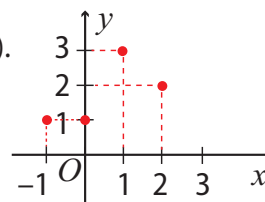


●●●●▷ Problemă rezolvată

Știind că reprezentarea geometrică a graficului funcției $g : D \rightarrow C$ este cea din imaginea alăturată, determină domeniul de definiție al funcției g și calculează $g(1)$.

Rezolvare:

Un punct $P(a; b)$ aparține graficului funcției g dacă și numai $a \in D$ și $g(a) = b$. De aceea, abscisele punctelor de pe graficul lui g sunt elementele domeniului de definiție (adică $D = \{-1; 0; 1; 2\}$). Obținem $g(1) = 3$.



●●●●▷ Evaluăm nivelul de bază

1. Pentru funcția $f : \{-2; -1; 3\} \rightarrow \{-3; -2; 1; 2\}$, $f(x) = x - 1$, verifică dacă $(-2; 1) \in G_f$.
2. Reprezintă grafic, într-un sistem de axe, funcția $f : \{-1; 0; 1; 3\} \rightarrow \{-2; 0; 2; 6\}$, $f(x) = 2x$.

●●●●▷ **Probleme propuse**

- ★ 1. Alege răspunsul corect! Care dintre următoarele perechi de numere aparține graficului funcției $f: \{-1; 0; 1\} \rightarrow \{0; 1; 2; 3\}$, $f(x) = 2 - x$?
A) (2; 0) **B)** (1; 1) **C)** (0; 3) **D)** (-1; 1)

2. Descrie prin diagramă și prin reprezentare grafică funcția $u: \{-1; 1; 2\} \rightarrow \{1; 2; 4\}$ dată prin tabelul alăturat.

x	-1	1	2
$u(x)$	4	2	1

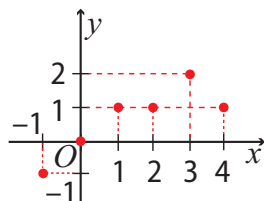
3. Reprezintă geometric graficele funcțiilor:

- a)** $f: \{1; 2; 3\}$, $f(x) = 4 - x$;
b) $f: \{-1; 0; 1; 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$.

★★

5. Considerăm funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x + a$, unde a este un număr întreg. Determină valoarea numărului a , știind că $(1; 5) \in G_f$.

6. În figura de alături este reprezentat graficul funcției $f: D \rightarrow C$.



- a)** Determină $f(2)$.
b) Identifică domeniul de definiție și mulțimea valorilor funcției f .
c) Adevărat sau fals? $(1; 2) \in G_f$.
d) Determină $a \in D$ pentru care $f(a) = 2$.
e) Calculează $f(2) + f(3) + f(4)$.

★★★

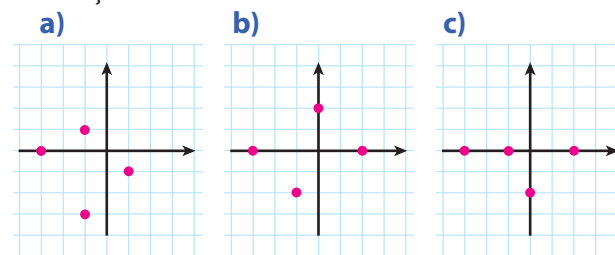
8. Fie A o mulțime finită și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ o funcție a cărei mulțime de valori este $\{0; 1; 2; 3\}$. Care este numărul maxim posibil de puncte din care poate fi format graficul lui f ?

★★★★

10. Fie mulțimea $M = \{1; 2; 3; \dots; 10\}$. Reprezintă grafic toate funcțiile $f: M \rightarrow M$, care verifică simultan condițiile:
 $f(i) \neq f(j)$ pentru orice $i \neq j$ și
 $1 + f(1) < 2 + f(2) < \dots < 10 + f(10)$.

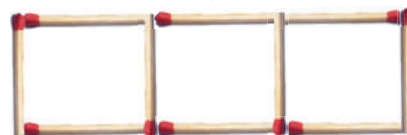


4. În care dintre imaginile următoare apare reprezentarea geometrică a graficului unei funcții?



Justifică răspunsul.

7. **Investigație.** Folosind 10 bețe de chibrit, Geo a construit figura de mai jos, formată din 3 pătrate. El vrea să afle câte bețe de chibrit i-ar fi necesare pentru o figură cu 30 de pătrate.



- a)** Completează tabelul:

Nr. de pătrate	1	2	3	4	5
Nr. de bețe			10		

- b)** Reprezintă grafic funcția descrisă prin tabel. Observă cum sunt așezate punctele de pe grafic și propune un răspuns pentru Geo.

9. Fie funcția $f: \{-1; 0; 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax - 1$. Reprezintă grafic funcția f dacă:

- a)** punctul de coordonate $(-1; 2)$ aparține G_f ;
b) $f(-1) \cdot f(0) \cdot f(1) = 3$.

11. O firmă proiectează blocuri compuse din parter, cel mult 4 etaje și mansardă. Parterul are înălțimea 4,5 m, un etaj are 3 m, iar mansarda are 2,5 m. Reprezintă grafic funcția care exprimă asocierea între numărul de etaje și înălțimea blocului.

●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

- A** Se consideră funcția $f: \{2; 4; 6\} \rightarrow \{5; 7; 9\}$, $f(x) = x + 3$. Arată că $(4; 7) \in G_f$.

- B** Scrie graficul funcției $a: \{1; 3; 6; 7\} \rightarrow \mathbb{R}$, $a(x) = \text{aria discului cu raza } x$.

- C** Câte puncte din reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = 10 - n^2$ sunt situate în cadranul I al sistemului de axe?

Lecția 3

Funcții de forma $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, cu $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ și D o mulțime finită, $D \subset \mathbb{R}$

●●●●▷ O situație-problemă

Un bilet de intrare la o casă memorială costă 2 lei de persoană, dar pentru grupuri de 3 până la 5 vizitatori se scade 1 leu din suma totală. Liza și-a propus să găsească o reprezentare grafică prin care s-ar putea calcula rapid costul intrării pentru diferite grupuri de vizitatori. Ea și-a dat seama că poate folosi funcția $p: \{3; 4; 5\} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = 2x - 1$.

Vrem să știm! >>>

Există un comportament general al punctelor de pe graficul unei funcții de forma $f: D \rightarrow C$, $f(x) = ax + b$?



●●●●▷ Observăm și demonstrăm

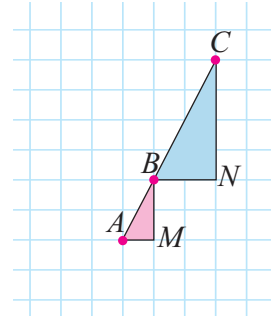
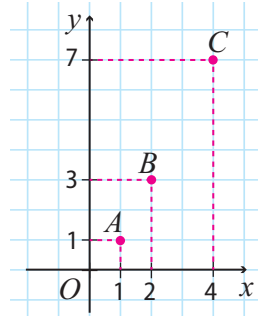
În imaginea alăturată apare reprezentarea geometrică a graficului funcției $g: \{1; 2; 4\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 1$. Demonstrăm că punctele A, B, C , care alcătuiesc reprezentarea grafică a funcției g , sunt coliniare.

Triunghiurile dreptunghice AMB și BNC sunt

asemenea, deoarece $\frac{AM}{BN} = \frac{MB}{NC} = \frac{1}{2}$. Atunci,

$\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle BCN$, de unde rezultă că $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABM + \sphericalangle MBN + \sphericalangle NBC = \sphericalangle BCN + 90^\circ + \sphericalangle NBC = 180^\circ$. Deducem că punctele A, B și C sunt coliniare.

În general: Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții de forma $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ și D o mulțime finită, este alcătuită din puncte coliniare.



●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

Reprezentarea grafică a funcției de calcul a prețului de intrare, adică $p: \{3; 4; 5\} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = 2x - 1$, este formată din trei puncte coliniare. Folosind acest grafic, putem stabili imediat cât are de plătit un grup format din 3, 4 sau 5 persoane.

●●●●▷ Problemă rezolvată

Se știe că $A(-1, 2)$ și $B(3, 4)$ aparțin imaginii geometrice a graficului funcției $f: \{-1, 3, 5\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Calculează $f(5)$.

Rezolvarea Anei: *Determin expresia funcției*

Deoarece $A(-1, 2)$ și $B(3, 4)$ aparțin graficului funcției f , rezultă că $f(-1) = 2$ și $f(3) = 4$.

Scriem aceste relații sub forma: $a \cdot (-1) + b = 2$, respectiv $a \cdot 3 + b = 4$.

Pentru a determina expresia funcției f , aflăm

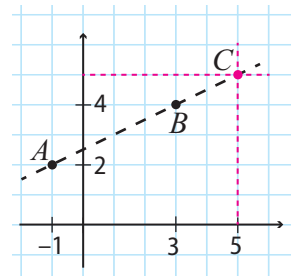
numerele a și b rezolvând sistemul
$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ 3a + b = 4 \end{cases}$$
.

Obținem $a = 0,5$ și $b = 2,5$, deci $f(x) = 0,5x + 2,5$. Deducem că $f(5) = 5$.

Rezolvarea lui Dan: *Folosesc proprietățile graficului*

Știm că punctele A, B și $C(5; f(5))$ sunt coliniare, deoarece funcția este de forma $x \mapsto ax + b$.

Reprezentăm într-un sistem de axe punctele A și B și identificăm punctul C , coliniar cu acestea, cu abscisa egală cu 5. Deducem că $f(5) = 5$.



●●●●▷ Evaluăm nivelul de bază

Reprezintă grafic, într-un sistem de axe ortogonale, funcția $f: \{-2; 0; 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 2$. Folosește apoi rigla și verifică dacă punctele din care este format graficul sunt coliniare.

●●●●▷ Probleme propuse

★

1. Adevărat sau fals? Punctul $A(1; 2)$ aparține reprezentării grafice a funcției $f: \{-1; 0; 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$.
2. Fie $f: \{-1; 1; 2; 4\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 1$. Determină ordonatele punctelor care aparțin graficului funcției f .

★★

5. Reprezintă grafic funcțiile următoare, după ce scrii explicit domeniile acestora.
 - a) $f: \{x | x \in \mathbb{Z}, |x-1| \leq 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$;
 - b) $g: \{x | x \in \mathbb{N}, 6 \vdots x\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$.

★★★

7. **Investigație.** Geo a descris în tabel funcția $f: \{-1, 0, 2, 6\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 4$.

x	-1	$\xrightarrow{+1}$	0	$\xrightarrow{+2}$	2	$\xrightarrow{\quad}$	6
$f(x)$	-7	$\xrightarrow{+3}$	-4	$\xrightarrow{\quad}$	$\xrightarrow{\quad}$	$\xrightarrow{\quad}$	$\xrightarrow{\quad}$

- a) Copiază pe caietul tău tabelul de valori al funcției f și completează spațiile libere cu numere potrivite.
- b) Observă diferențele dintre numerele de pe prima linie și cele dintre numerele de pe a doua linie: arată că acestea sunt direct proporționale.
- c) Repetă calculele pentru funcția $g: \{-3; -1; 2; 6\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -2x + 3$. Care este acum factorul de proporționalitate?
- d) Explică ce legătură este între proporționalitatea găsită și faptul că reprezentările grafice ale funcțiilor de mai sus sunt formate din puncte coliniare.

★★★★

10. Ana a completat tabelul de valori al unei funcții de forma $f(x) = ax + b$, ca în imagine.

x	m	n	p
$f(x)$	p	n	m

Demonstrează că $a = -1$ și că $2n = m + p$.

3. Funcția $f: \{1; 2; 5\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{2}$ este o

funcție de forma $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Determină mulțimea D și numerele a și b .

4. Construiește diagrama cu săgeți și tabelul de valori corespunzătoare funcției $f: \{-3; 1; 0; 4\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x - 1$.

6. Reprezintă grafic funcția f pentru care $f(x)$ este cel mai mare divizor al lui x , diferit de x , iar domeniul de definiție este: **a)** $\{2; 4; 6; 8; 10\}$; **b)** $\{3; 6; 9; 12; 15\}$. Pentru fiecare caz în parte, justifică dacă funcția este de forma $x \mapsto ax + b$.

8. O bancă oferă depunătorilor săi o dobândă lunară de 0,3%. Trei clienți au depus sumele de 10000 lei, 15000 lei, respectiv 20000 lei. Exprimă modalitatea de calcul pentru suma restituită celor trei depunători după o lună cu ajutorul unei funcții definite printr-o formulă.

9. Pentru funcțiile reprezentate în tabelele următoare, scrie domeniul, un codomeniu și o lege de corespondență de forma $f(x) = ax + b$:

a)

x	-1	0	1	2
$f(x)$	-3	0	3	6



b)

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	4	3	2	1

c)

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	3	5	7

11. Mulțimea D are 3 elemente și este inclusă în $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Știm că funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{CMMDC}\{x; 20\}$ este o funcție de forma $f(x) = ax + b$. Demonstrează că $a \in \{-1; 0; 1\}$ și $b \in \{0; 1; 8\}$.

●●●●▷ Alege și rezolvă în 5 minute!

A

Fie $f: \{-5; -1; 8; 12\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x - 1$. Identifică domeniul de definiție calculează $f(12)$.

B

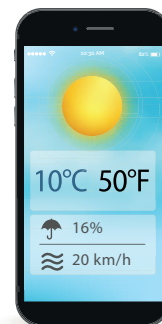
Stabilește care dintre punctele $A(-2; -9)$, $B(-1; -8)$, $C(3; 7)$ și $D(3; -4)$ aparțin reprezentării geometrice a graficului funcției $f: \{-2; 0; 3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 7$.

C

Fie $f: \{-5; -2; 4; 10\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 6$. Determină valorile lui a și m , știind că $A(-2; 4)$ și $B(m; 10)$ aparțin reprezentării geometrice a graficului funcției f .

Lecția 4

Funcții de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, cu $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$



●●●●▷ O situație-problemă

Pe telefonul Emei, temperatura este afișată în grade Fahrenheit (°F) și în grade Celsius (°C). Ea a citit că formula de transformare între cele două scale de temperatură este:

$$x^{\circ}\text{F} = (x - 32) \cdot \frac{5}{9}^{\circ}\text{C}.$$

Ema ar vrea să reprezinte grafic funcția $x \mapsto (x - 32) \cdot \frac{5}{9}$,

pentru a putea face mai ușor transformări dintr-o scală în alta.

Vrem să știm!

Cum construim reprezentarea geometrică a graficului unei funcții de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, cu $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$?

●●●●▷ Ne amintim și generalizăm!

Știm deja că orice 3 puncte din graficul unei funcții de forma $x \mapsto ax + b$ sunt coliniare. De aceea, reprezentarea geometrică a graficului unei funcții de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ este o dreaptă.

●●●●▷ Să comparăm

O dreaptă este determinată de două puncte distincte. De aceea, pentru a reprezenta o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de forma $f(x) = ax + b$, este suficient să determinăm două puncte ale graficului. De exemplu, pentru a reprezenta grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$, putem proceda astfel:

Determinăm două puncte arbitrare de pe grafic

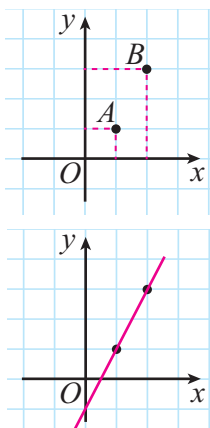
- 1 Alegem două numere diferite din domeniu: de exemplu 1 și 2 și calculăm valorile funcției pentru numerele alese.

x	1	2
$f(x)$	1	3

- 2 Reprezentăm grafic punctele de coordonate:

$$A(1; f(1)) = A(1; 1),$$

$$B(2; f(2)) = B(2; 3).$$



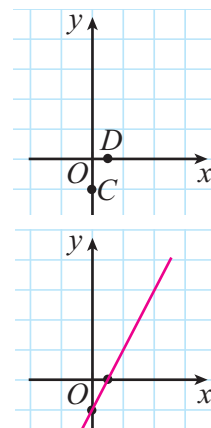
- 3 Trasăm dreapta ce trece prin punctele reprezentate.

Determinăm intersecțiile graficului cu axele

- 1 Pentru intersecția cu axa Ox , rezolvăm ecuația $f(x) = 0$, pentru intersecția cu axa Oy , calculăm $f(0)$.

x	0	0,5
$f(x)$	-1	0

- 2 Reprezentăm grafic punctele de intersecție cu axele: $C(0; -1), D(0,5; 0)$.



- 3 Trasăm dreapta ce trece prin punctele reprezentate.

●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

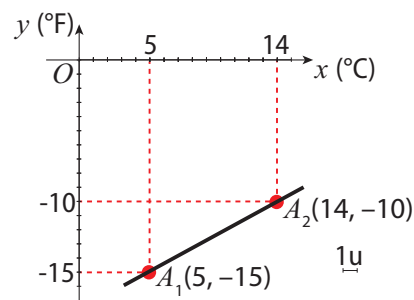
Alegem două numere distincte, de exemplu, $x_1 = 5$ și $x_2 = 14$.

Calculăm $f(x_1) = -15$ și $f(x_2) = -10$.

Obținem punctele $A_1(5; -15)$ și $A_2(14; -10)$.

Reprezentăm punctele A_1 și A_2 și trasăm dreapta A_1A_2 care trece prin cele două puncte.

Obținem astfel graficul funcției care arată transformarea din scala Celsius în scala Fahrenheit.



●●●●▷ Evaluăm nivelul de bază

Reprezintă grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x + 1$.

●●●●▷ Probleme propuse

- ★
1. Alege răspunsul corect! Intersecția graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 6$, cu axa Ox este punctul de coordonate:
A) (0; 6) **B)** (2; 0) **C)** (-2; 0) **D)** (-1; 3)
 2. Adevărat sau fals? Punctul de intersecție între axa Oy și graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 2$, are coordonatele (0; 2).
 3. Verifică dacă graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 2$, conține următoarele puncte: $A(-1; 5)$; $B(1; 2)$; $C(0; 0)$; $D(0,5; -1,5)$.



★★

7. Copiază pe caiet, apoi completează tabelul de valori al funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 4$.

x	0	-1			1,5	
$f(x)$			0	-2		10

8. Determină numărul m , știind că $(1; m)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -5x + 3$.
9. Calculează aria triunghiului format de graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 6$, cu axele sistemului de coordonate.

★★★

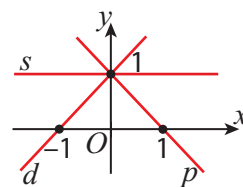
12. Determină $m \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $A(2m^2; m + 1)$ aparține reprezentării grafice a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0,5x + 1$.
13. **a)** Determină funcția a cărei reprezentare grafică este dreapta AB , unde $A(1; -1)$, $B(3; 3)$.
b) Folosește funcția determinată anterior pentru a justifica dacă punctele A , B și $C(8; 11)$ sunt coliniare.

★★★★

15. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$. Considerăm funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, descrisă astfel: $g(a + 2) = f(a)$, pentru orice număr real a .
a) Calculează $g(1)$ și $g(2)$. **b)** Determină formula prin care se exprimă funcția g . **c)** Reprezintă în același sistem de axe funcțiile f și g .

4. Reprezintă grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, descrisă prin:
a) $f(x) = -2x + 1$; **b)** $f(x) = x + 1$; **c)** $f(x) = 3$.
5. Citește formula de transformare din situația-problemă. Transformă în $^{\circ}\text{F}$ temperaturile: 23°C ; 32°C ; 41°C .
6. Reprezintă grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, prin care unui număr i se asociază:
a) triplul său;
b) opusul său;
c) triplul opusului său.

10. Care dintre dreptele p , s sau d , reprezentate alături, poate fi graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 1$?



11. Calculează $f(1) + f(2) + \dots + f(100)$, pentru:
a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$; **b)** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$;
c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 5$; **d)** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$.

14. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 1$.
a) Reprezintă grafic funcția f .
b) Demonstrează că, dacă $p \leq 2$, atunci $f(p) \geq -5$.
c) Află toate valorile numărului real m , pentru care $f(m) \geq 7$.
d) Demonstrează că, dacă $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, cu $x_1 \neq x_2$, atunci $f(x_1) \neq f(x_2)$.

16. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care îndeplinește condiția $2f(a) + f(1 - a) = 3a$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.
a) Determină $f(2)$ și $f(-1)$.
b) Descrie funcția f printr-o formulă.
c) Reprezintă grafic funcția f .

●●●●▷ Alege și rezolvă în 5 minute!

A

Reprezintă grafic, într-un reper cartezian, funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$.

B

Calculează numărul m , știind că $P(m; m+1)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 1$.

C

Determină funcția a cărei reprezentare grafică este dreapta AB , unde $A(0; 3)$ și $B(2; 5)$.

Funcții de forma $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, cu $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, unde D este un interval. Interpretare geometrică

O situație-problemă

După ce a mers 2 km pe jos până la clubul de turism, Ana a plecat într-o excursie cu bicicleta, deplasându-se cu viteza de 10 km/h. Ea ar vrea să folosească o reprezentare grafică, pentru a afla rapid la ce distanță este, în orice moment, față de casă. Pentru aceasta, Ana a considerat funcția $t \mapsto 10t + 2$, care exprimă distanța parcursă (calculată în kilometri), în funcție de timpul de deplasare cu bicicleta (calculat în ore).

Vrem să știm!

Cum reprezentăm grafic funcții de forma $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, cu $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, pe diferite tipuri de intervale D ?



Ne amintim și observăm!

Știm că orice trei puncte de pe graficul unei funcții de forma $x \mapsto ax + b$ sunt coliniare. De aceea, dacă domeniul de definiție al acestei funcții este un interval, atunci graficul funcției este o porțiune dintr-o dreaptă. Mai precis:

Graficul funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde D este un interval, este:

- o semidreaptă închisă (care își conține originea), dacă D este un interval închis, nemărginit
- o semidreaptă deschisă (care nu își conține originea), dacă D este un interval deschis, nemărginit
- un segment închis (care își conține capetele), dacă D este un interval închis și mărginit
- un segment deschis (care nu își conține capetele), dacă D este un interval deschis și mărginit

Am văzut că reprezentarea geometrică a graficului funcției $f(x) = ax + b$ are aceeași formă cu reprezentarea domeniului acestei funcții pe axa numerelor. Reprezintă pe axa numerelor un interval închis nemărginit și un interval deschis, mărginit.

Gândim critic și constructiv!

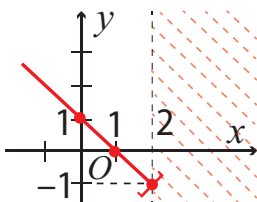
Exemplul 1: Pentru a reprezenta grafic funcții de forma $x \mapsto ax + b$, definite pe intervale nemărginite, putem proceda astfel:

Fie $f: (-\infty; 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$

- Completăm un tabel de valori ale funcției f , marcând domeniul ei de definiție: în tabel, completăm obligatoriu valoarea funcției pentru $x = 2$, dar și alte valori.

x	$-\infty$	0	1	2]	$+\infty$
$f(x)$		1	0	-1]	

- Reprezentăm punctele corespunzătoare într-un sistem de axe, apoi trasăm graficul.

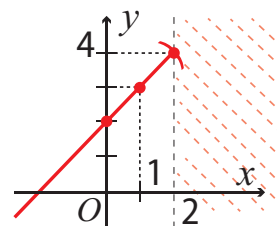


Fie $g: (-\infty; 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 2$

- Completăm un tabel de valori ale funcției g , evidențiind și capătul domeniului funcției: chiar dacă funcția nu este definită în 2, punctul $P(2; 4)$ se notează în tabel, pentru a obține o reprezentare corectă a graficului.

x	$-\infty$	0	1	2)	$+\infty$
$g(x)$		2	3	4)	

- Reprezentăm punctele corespunzătoare într-un sistem de axe, apoi trasăm graficul.



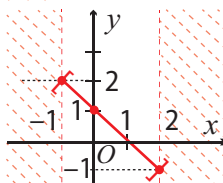
Exemplul 2: Pentru a reprezenta grafic funcții de forma $x \mapsto ax + b$, definite pe **intervale mărginite**, putem proceda astfel:

Fie $f: [-1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 1$.

Întocmim un tabel de valori ale lui f .

x	$-\infty$	$[-1$	0	$2]$	$+\infty$
$f(x)$		$[2$	1	$-1]$	

Reprezentăm în plan punctele corespunzătoare acestor valori, apoi trasăm graficul lui f .

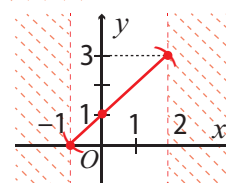


Fie $g: (-1; 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$.

Întocmim un tabel de valori ale lui g .

x	$-\infty$	$(-1$	0	$2)$	$+\infty$
$g(x)$		$(0$	1	$3)$	

Reprezentăm în plan punctele corespunzătoare acestor valori, apoi trasăm graficul lui g .



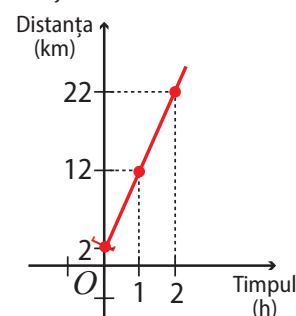
●●●● ▷ Rezolvăm situația-problemă

Legea de mișcare descrisă în problemă este $d(t) = 2 + 10t$. Reprezentăm grafic funcția $d: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Obținem tabelul de valori:

x	$-\infty$	$[0$	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$		$[2$	12	22	32	

Deoarece reprezentăm mărimi diferite (timpul și distanța), putem alege unități diferite de măsură pe cele două axe.

Cum timpul este continuu, imaginea variației distanței în funcție de timp va fi clară dacă unim punctele. Obținem astfel graficul alăturat.



●●●● ▷ Evaluăm nivelul de bază

1. Reprezintă grafic în sistemul ortogonal xOy funcția $f: (-2; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$.

2. Reprezintă grafic în sistemul ortogonal xOy funcția $g: (0; 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2 - x$.

Pentru a face cunoscută prezența speciei umane în univers, astronomii au transmis un semnal radio în direcția roiului stelar *Messier 13*. Din cauza atmosferei terestre, semnalul a fost emis de pe stația orbitală *Mars 3*, situată la distanța de 0,5 u.a. (unități astronomice) de Pământ. Undele radio se deplasează cu viteza de 0,2 u.a. pe minut.

Astronomii au estimat că semnalul va ajunge la ținta vizată după o perioadă enormă de timp și anume, după 24 000 de ani tereștri. De aceea, ei interpretează expresia distanței la care se află acum semnalul radio ca pe o funcție d al cărei domeniu de definiție este $[0; +\infty)$.

Precizează elementele funcției care descrie distanța parcursă de semnalul radio. Reprezintă grafic funcția, după ce ai ales o unitate de măsură convenabilă.

Gândim critic și constructiv!

●●●● ▷ Problemă rezolvată

Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$, unde $D = \{x | x \in \mathbb{R}, |x| \leq 1\}$. Determină:

a) domeniul de definiție al funcției f ; b) mulțimea $F = \{x \in D | f(x) \in \mathbb{Z}\}$.

Rezolvare: a) $|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. Rezultă că $D = [-1; 1]$ este domeniul de definiție al funcției f .

b) $f(x) \in \mathbb{Z}$ deci $2x - 3 \in \mathbb{Z}$ adică $2x \in \mathbb{Z}$. Obținem $x = \frac{k}{2}$, cu $k \in \mathbb{Z}$; cum $x \in [-1; 1]$, rezultă $\frac{k}{2} \in [-1; 1]$

Avem $k \in [-2; 2] \cap \mathbb{Z}$. Rezultă $F = \{-1; -0,5; 0; 0,5; 1\}$.

●●●●▷ Probleme propuse

1. Asociază fiecărei funcții din lista următoare unul dintre cuvintele: dreaptă, semidreaptă, segment, alegând cuvântul ce exprimă forma graficului.

a) $f: (-\infty; -2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1;$

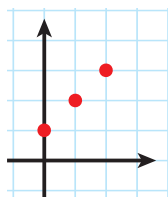
b) $g: (-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x + 2;$

c) $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, u(x) = 1;$

d) $v: (0; 3) \rightarrow \mathbb{R}, v(x) = x.$

2. Adevărat sau fals?

Imaginea prezintă graficul funcției $f: [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.



3. Identifică domeniul de definiție și reprezintă grafic funcțiile de forma $x \mapsto ax + b$ corespunzătoare tabelelor:

a)	x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
	$f(x)$		1	2	
b)	x	$-\infty$	$(-3$	$-1)$	$+\infty$
	$g(x)$		$(-1$	$-3)$	
c)	x	$-\infty$	$(-1$	2	$+\infty$
	$h(x)$		$(-3$	1	
d)	x	$-\infty$	$[1$	$2]$	$+\infty$
	$u(x)$		$[0$	$1]$	

4. Reprezintă grafic funcțiile:

a) $f: [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1;$

b) $g: (-\infty; 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x;$

c) $h: [1; 3) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 0,5x - 1;$

d) $u: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, u(x) = x - 3;$

e) $v: (-1; 2) \rightarrow \mathbb{R}, v(x) = 2x - 1;$

f) $d: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, d(x) = -x + 3.$

5. În rezervorul unei mașini Dacia încap 42 l de benzină și aceasta consumă în medie 6 l de benzină la 100 km. Ce cantitate de benzină va fi în rezervor după ce mașina a parcurs:

a) 10 km; b) 30 km; c) 120 km; d) 300 km?

Reprezintă grafic funcția ce descrie cantitatea de benzină din rezervor, în funcție de distanța parcursă de mașină.

★★★

6. Fie $f: [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-1}{2}$

a) Reprezintă grafic funcția f .

b) Determină punctele de pe graficul lui f cu ambele coordonate numere întregi.

7. Se consideră $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, exprimată prin $f(x) = x + 2$, unde $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } x \leq 2\}$.

a) Explicitează domeniul lui f .

b) Reprezintă grafic funcția f .

c) Se află $P(3; 5)$ pe graficul lui f ?

8. În urma unei reduceri de prețuri, articolele dintr-un magazin s-au ieftinit cu 15%.

Exprimă legea de corespondență dintre vechiul preț și noul preț. Reprezintă grafic funcția corespunzătoare.

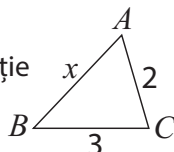
9. Un autocar a plecat din Iași, la ora 14. Autocarul merge cu viteză medie de 60 km/h, timp de 3 ore.

a) Reprezintă grafic variația distanței ca funcție de timp.

b) Determină pe grafic distanța față de Iași la care se află autocarul la ora 14:45.

★★★★

10. Reprezintă grafic perimetrul triunghiului din imagine, ca funcție de lungimea x a laturii AB .



11. Apa dintr-un acvariu cu capacitatea de 300 l se scurge printr-un robinet, cu debitul de 1,5 l/min. Reprezintă grafic funcția care descrie cantitatea de apă rămasă în acvariu, ca funcție de timp.



●●●●▷ Alege și rezolvă în 5 minute!

A

Reprezintă grafic, într-un reper cartezian, funcția $f: [-2; 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 2.$

B

Reprezintă grafic, într-un reper cartezian, funcția $f: [2; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2.$

C

Exprimă lungimea L a unui dreptunghi cu perimetrul de 8 cm în funcție de lățimea l și reprezintă grafic, într-un reper cartezian, funcția astfel obținută.

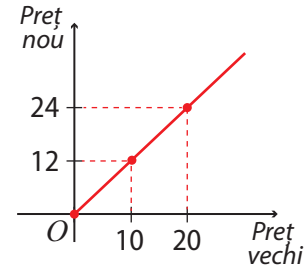
Lecția 6 Lecturi grafice

► O situație-problemă

Pentru a calcula noile prețuri în urma unei scumpiri, un vânzător a alcătuit graficul alăturat. Care este noul preț al unui articol care înainte de scumpire costa 50 lei? Dar vechiul preț al unui articol care acum costă 40 lei?

Vrem să știm! ►►

Cum citim/deducem informații semnificative din graficul unei funcții?

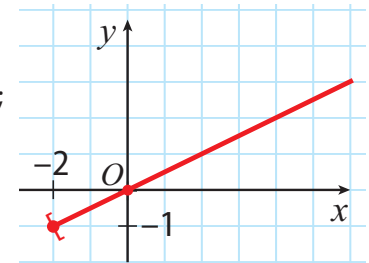


► Să observăm!

Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții numerice transmite informații diverse, ce pot fi interpretate și deduse prin „lecturi grafice”.

De exemplu, analizând imaginea alăturată, putem deduce că:

- 1 Aceasta este reprezentarea grafică a unei funcții de forma $f(x) = ax + b$;
- 2 Domeniul de definiție al funcției este $[-2; +\infty)$;
- 3 Punctele de coordonate $(-2; -1)$ și $(0; 0)$ aparțin graficului funcției, deci $f(-2) = -1$ și $f(0) = 0$;
- 4 Mulțimea valorilor funcției f este $[-1; +\infty)$.



Argumentează toate afirmațiile de mai sus.

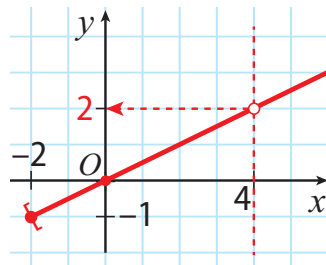
Gândim critic și constructiv!

Folosind același grafic, putem calcula diverse valori ale funcției, sau putem rezolva grafic unele ecuații. De exemplu:

Pentru a calcula $f(4)$:

- 1 construim dreapta verticală ce trece prin punctul de abscisă 4;
- 2 determinăm punctul de intersecție a graficului cu această dreaptă
- 3 identificăm ordonata acestui punct.

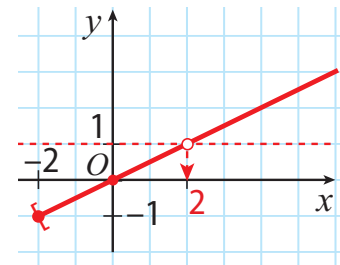
Obținem: $f(4) = 2$.



Pentru a rezolva ecuația $f(x) = 1$:

- 1 construim dreapta orizontală ce trece prin punctul de ordonată 1;
- 2 determinăm punctul de intersecție a graficului cu această dreaptă;
- 3 identificăm abscisa acestui punct.

Obținem: soluția ecuației $f(x) = 1$ este $x = 2$.

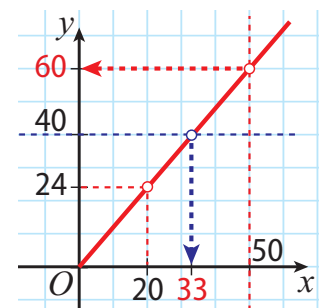


► Rezolvăm situația-problemă

Notăm cu f funcția care descrie noul preț al articolelor. Din grafic, deducem că $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, că f este o funcție de forma $x \mapsto ax + b$ și că punctele $A(10; 12)$ și $B(20; 24)$ aparțin graficului funcției.

Pentru a afla informațiile cerute, trasăm graficul pe o foaie cu pătrățele și alegem o unitate de măsură adecvată. Aplicând pașii indicați mai sus, obținem că:

- un articol de 50 lei va costa, după scumpire, 60 lei;
- un articol care costă, după scumpire, 40 lei, a costat aproximativ 33 lei.



●●●●▷ Să comparăm

Tic a reprezentat, într-un sistem de axe, punctele $A(0;1)$, $B(1;3)$ și $C(14;28)$. Ana și Liza au vrut să știe dacă aceste puncte sunt coliniare însă ele nu au putut decide doar privind reprezentarea. De aceea, au preferat să calculeze.

Rezolvarea Anei

Determinăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, al cărei grafic este dreapta AB .

$$A(0; 1) \in G_f \Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow b = 1.$$

$$B(1; 3) \in G_f \Rightarrow f(1) = 3 \Rightarrow a + b = 3 \Rightarrow a + 1 = 3 \Rightarrow a = 2$$

Așadar, dreapta AB este graficul funcției

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1.$$

$$\text{Atunci, } C \in AB \Leftrightarrow (14; 28) \in G_f \Leftrightarrow f(14) = 28 \text{ ceea ce este fals.}$$

Deci, punctele A , B și C **nu** sunt coliniare.

Rezolvarea Lizei

Punctele A , B și C sunt coliniare dacă $AB + BC = AC$. Aflăm lungimile segmentelor:

$$AB = \sqrt{5}, BC = \sqrt{794}, AC = \sqrt{925}.$$

$$\text{Trebuie să stabilim dacă } \sqrt{5} + \sqrt{794} = \sqrt{925} \text{ și,}$$

pentru aceasta, aproximăm:

$$\sqrt{5} + \sqrt{794} \approx 2,2 + 28,2 = 30,4; \sqrt{925} \approx 30,5.$$

$$AB + BC \approx AC.$$

Deci punctele A , B , C sunt coliniare.

Observăm că Ana și Liza au obținut răspunsuri diferite. Motivul este că, atunci când lucrăm cu valori aproximative, concluziile pot fi greșite!

De aceea, pentru a demonstra că trei puncte raportate la același sistem de coordonate sunt coliniare, este util să procedăm astfel:

- 1) determinăm o funcție de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, al cărei grafic este dreapta ce trece prin două dintre punctele date;
- 2) verificăm dacă al treilea punct aparține graficului acestei funcții.

●●●●▷ Problemă rezolvată

a) Reprezintă grafic, în același sistem de axe, funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-4}{2}$, $g(x) = 3 - 2x$ și determină coordonatele punctului de intersecție a graficelor.

b) Explică ce legătură există între coordonatele determinate și sistemul $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$.

Rezolvare:

a) Completăm tabele de valori pentru cele două funcții și le reprezentăm grafic, în același sistem de axe.

x	0	4
$f(x)$	-2	0

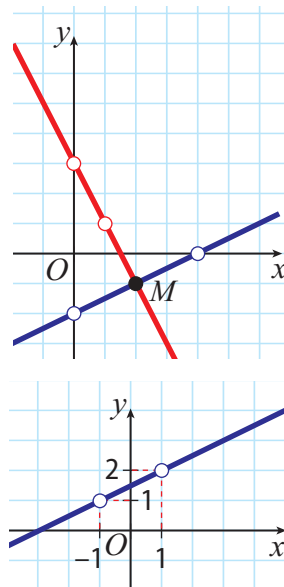
x	0	1
$g(x)$	3	1

Observăm că cele două grafice se intersectează în punctul M , ale cărui coordonate sunt $(2; -1)$.

b) Un punct de coordonate $(x; y)$ este punctul de intersecție a celor două grafice dacă și numai dacă $f(x) = y$ și $g(x) = y$.

$$\text{Deducem că } \{(x; y)\} = G_f \cap G_g \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x-4}{2} \\ y = 3-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y = 4 \\ 2x+y = 3 \end{cases}$$

Altfel spus: coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții constituie soluția sistemului din enunț.

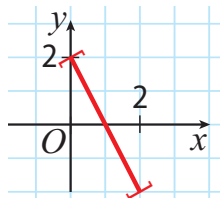


●●●●▷ Evaluăm nivelul de bază

Determină intersecțiile dintre graficul funcției reprezentată alăturat și axele sistemului de coordonate.

●●●●► **Probleme propuse**

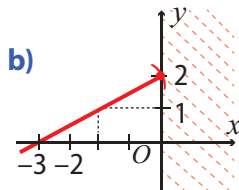
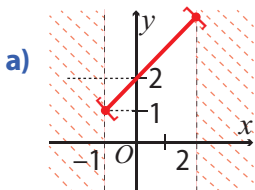
1. Pentru funcția f reprezentată grafic în imaginea alăturată, precizează domeniul de definiție, apoi determină $f(2)$; $f(0)$; $f(1)$.



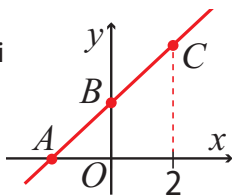
2. Calculează lungimea graficului funcției $f: [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - 2x$.

★★

5. Determină domeniul, mulțimea valorilor și descrie printr-o formulă funcțiile ale căror grafice sunt reprezentate mai jos:

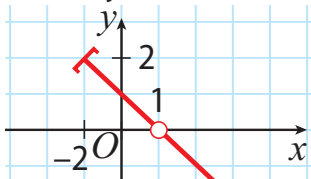


6. În figura alăturată este reprezentat graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$. Determină coordonatele punctelor A , B și C marcate pe grafic. Calculează AB și AC .



★★★

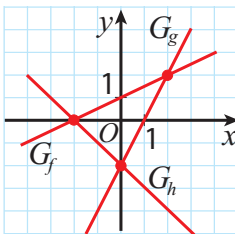
10. Graficul funcției g este reprezentat în imaginea de mai jos.



- a) Precizează domeniul de definiție al funcției.
b) Calculează $g(-2)$, $g(1)$ și $g(-1)$.
c) Observă imaginea, apoi rezolvă inecuația $g(x) \leq 0$.

★★★★

12. În figură sunt reprezentate graficele a trei funcții. Arată că originea sistemului de axe este centrul de greutate al triunghiului format de cele trei grafice.

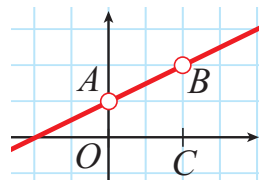


3. Calculează aria triunghiului ABO , unde A și B sunt punctele de intersecție cu axele ale reprezentării grafice a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 1$.

4. Propune două funcții de forma $x \mapsto ax + b$, definite pe mulțimea numerelor reale, ale căror grafice se intersectează în punctul de coordonate $(1; 1)$. Verifică apoi dacă ai avut dreptate, reprezentând grafic funcțiile propuse de tine.

i

7. Reprezentarea grafică a funcției f este dreapta AB , unde $A(0; 1)$, $B(2; 2)$.



- a) Folosește trapezul dreptunghic $OABC$ din figură, pentru a calcula $f(1)$.
b) Determină expresia funcției f , apoi verifică prin calcul rezultatul de la a).

8. Reprezintă în același sistem de axe funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = 2 - x$. Determină coordonatele punctului de intersecție a celor două grafice. Verifică prin calcul dacă ai avut dreptate.

9. Reprezintă în același sistem de axe graficele funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 3$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 2x$. Ce observi?

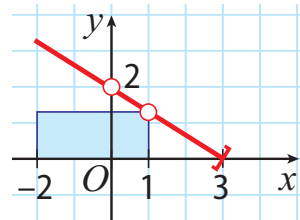
11. **Investigație.** O agenție de turism oferă două variante de plată, eșalonată pe mai multe luni, pentru o excursie.

Varianta 1: Plată inițială: 300 lei. Rate lunare: 50 lei

Varianta 2: Plată inițială: 50 lei. Rate lunare: 100 lei

- a) Asociază fiecărei variante câte o funcție.
b) Reprezintă grafic cele două funcții, în același sistem de coordonate, alegând unități de măsură convenabile. c) Observă graficele, apoi află după câte luni pot fi colectate aceleași sume, în cele două variante de plată.

13. Observă figura, apoi calculează aria dreptunghiului evidențiat prin culoare.



Fișă pentru portofoliu. Alege și rezolvă două probleme dintre cele propuse în această lecție. Redactează rezolvarea, completând toate detaliile și calculele făcute și include această fișă în portofoliul final.

●●●●▷ O situație-problemă

La simularea evaluării naționale la matematică, elevii unei școli au obținut următoarele note: 8,45; 9,20; 5,60; 10; 4,75; 7,80; 9,65; 3,80; 4,55; 5,80; 10; 6,65; 6,20; 7,35; 7,15; 8,60; 8,90; 9,45; 9,15; 9,20; 7,15; 6,25; 4,60; 8,35; 7,80.

Ei ar dori să li se prezinte aceste rezultate într-o formă mai clară, astfel încât să poată înțelege mai bine rezultatele întregului grup.

Vrem să știm! >>>

Cum putem organiza și reprezenta seturi de date astfel încât să obținem cât mai multe informații semnificative?

Definiții >>>

 Rezultatele elevilor la simularea evaluării naționale reprezintă un exemplu de **date statistice**. Un studiu statistic înseamnă **culegerea, prelucrarea, analiza și interpretarea** unor date statistice. Datele culese în cadrul unui studiu statistic pot fi grupate în **categorii** (numite și **clase statistice**), pe baza unui anumit criteriu. Criteriul după care se face împărțirea datelor pe categorii se numește **caracteristica studiului**.

Numărul de participanți la un studiu se numește **efectivul** acelu studiu. Numărul de participanți înscriși într-o anumită clasă statistică reprezintă **frecvența absolută** a acelei clase. Raportul dintre frecvența absolută a unei clase statistice și numărul de participanți la studiu este **frecvența relativă** a acelei clase statistice; de regulă, aceasta se exprimă procentual.

●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

Pentru analiza rezultatelor simulării evaluării naționale, putem folosi diverse criterii; fiecare dintre acestea împart rezultatele elevilor în alte categorii. De exemplu, criteriul (caracteristica) „promovabilitate” determină două categorii (clase statistice), în care sunt grupate notele mai mici decât 5, respectiv notele mai mari sau egale cu 5. În acest caz, rezultatele elevilor din școală la simularea evaluării naționale pot fi prezentate astfel:

Interval de notare	Frecvența absolută	Frecvența relativă
1 – 4,99	4	16%
5 – 10	21	84%

Dacă folosim însă criteriul „calificative” (ce corespunde, în mare, unor aprecieri de tip „foarte bine”, „bine”, „suficient” sau „insuficient”), atunci rezultatele sunt grupate în 4 clase statistice: note între 1 și 4,99; note între 5,00 și 7,99; note între 8,00 și 9,99; note de 10. Folosind această caracteristică, rezultatele elevilor din școală sunt cele din tabelul următor, care detaliază mai bine situația analizată.

Interval de notare	Frecvența absolută	Frecvența relativă
1 – 4,99	4	16%
5 – 7,99	10	40%
8 – 9,99	9	36%
Nota 10	2	8%

Explică de ce suma frecvențelor relative ale claselor statistice este, de fiecare dată, egală cu 1 (sau 100%).

<<< **Gândim critic și constructiv!**

●●●●▷ Problemă rezolvată

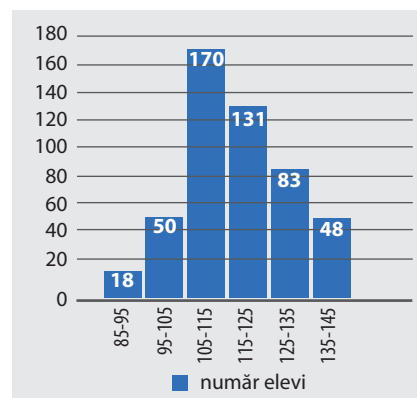
În tabelul alăturat, sunt înregistrate rezultatele măsurării înălțimii elevilor din clasele primare ale unei școli.

Înălțimea în cm	[85;95)	[95;105)	[105;115)	[115;125)	[125;135)	[135;145)
Număr elevi	18	50	170	131	83	48

- Determină:
 - numărul total de elevi participanți la studiu;
 - frecvența absolută a clasei [115; 125);
 - frecvența relativă a clasei [95; 105).
- Reprezintă datele înregistrate în tabel printr-un grafic cu bare.

Rezolvare:

- Numărul total de elevi este suma efectivelor celor 6 categorii:
 $18 + 50 + 170 + 131 + 83 + 48 = 500$;
 - frecvența absolută a clasei [115; 125) este 131, adică este numărul de elevi care au înălțimea în acest interval;
 - frecvența relativă a clasei [95; 105) este $\frac{50}{500} = \frac{1}{10}$.
- Graficul corespunzător este redat alăturat.



●●●●▷ Evaluăm nivelul de bază

Pentru situația-problemă din această lecție, organizează rezultatele elevilor la simularea evaluării naționale, folosind caracteristica „tranșe de note” (utilizată și de Ministerul Educației, pentru analize statistice), în care clasele statistice sunt cele din tabelul alăturat.

Calculează apoi frecvența relativă a fiecărei categorii.

Interval de notare	Număr
Note 1 – 4,99	
Note 5 – 5,99	
Note 6 – 6,99	
Note 7 – 7,99	
Note 8 – 8,99	
Note 9 – 9,99	
Note de 10	

●●●●▷ Probleme propuse

- Calculează efectivul total și frecvența relativă pentru fiecare categorie a studiului statistic prezentat în tabelul următor.

Categorie	A	B	C	D
Efectiv	225	300	150	325

- Într-un studiu de caz realizat într-o școală, elevii au răspuns la întrebarea: „Cât de pregătit(ă) te consideri pentru examen?”. Elevii au răspuns astfel: 75 de elevi – „Foarte bine”, 102 elevi – „Bine”, 64 de elevi – „Satisfăcător” și 24 de elevi – „Insuficient”.
 - Organizează datele culese într-un tabel.
 - Calculează efectivul total al studiului.
 - Precizează frecvențele absolute ale claselor „Bine” și „Insuficient”.
 - Reprezintă grafic datele culese.

- Pentru clasa ta, folosește criteriul „gen” (cu categoriile: fete/ băieți) și prezintă datele statistice sub formă de tabel și de diagramă circulară. Calculează frecvența relativă a fiecărei clase statistice din studiul tău.

- Profesorul de matematică a verificat temele suplimentare lucrate de elevii unei clase și a alcătuit tabelul de mai jos.

Nr. probleme	0-4	5-8	9-12	13-16
Nr. elevi	3	18	7	2

- Precizează caracteristica studiului.
- Determină numărul total de participanți.
- În care clasă statistică sunt cei mai mulți elevi?
- Reprezintă grafic datele din tabel.

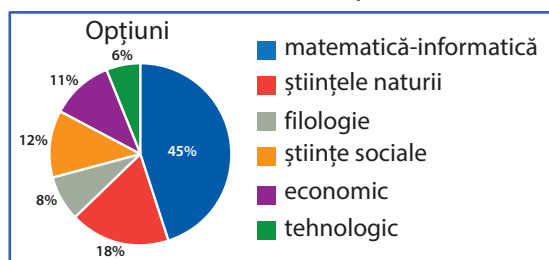


5. Alege răspunsul corect! Care dintre diagramele de mai jos prezintă grafic datele înregistrate în tabel?

Categorie	A	B	C
Efectiv	75	25	100



7. În diagrama circulară de mai jos, sunt prezentate opțiunile elevilor claselor a VIII-a dintr-o școală, cu privire la alegerea liceului la care doresc să studieze după absolvire.



- a) Pentru ce profil au optat cei mai mulți elevi?
b) Câți elevi de clasa a opta sunt în școală, dacă 12 elevi au ales profilul tehnologic?
c) Care este frecvența absolută pentru științe sociale?



10. Realizează un studiu statistic, la care participă colegii tăi, referitor la durata deplasării de acasă până la școală. Organizează datele și propune reprezentări grafice adecvate ale acestora, folosind grafice cu bare și diagrame circulare.



6. Tabelul prezintă statistica vânzărilor de autoturisme Dacia în trei ani consecutivi. Identifică caracteristica studiului, categoriile și frecvențele relative ale acestora.

An	Vânzări Dacia	
	Total	în România
2022	573.800	40.179
2023	658.321	46.124
2024	676.340	45.729

Sursa: Grup Renault

8. Completează tabelul următor, referitor la punctajele obținute la un concurs.

Punctajul	1-10	11-20	21-30	31-40
Efectivul		60	80	
Frecvența	20%			10%



9. Institutul Național de Statistică (INS) a publicat următoarele date despre turism, pentru primele 9 luni din 2024:

Numărul total de zile de cazare a fost de 24,099 milioane, înregistrând o creștere de 3,3% față de anul precedent. Din acestea, 84,3% au fost realizate de turiști români, iar restul de 15,7% de turiști străini. (<https://insse.ro/cms/>) Calculează:

- a) numărul de turiști români din perioada analizată; b) numărul de zile de cazare din primele 9 luni ale anului 2023.

11. Ana vrea să reprezinte rezultatele colegilor la test printr-o diagramă circulară. Care este măsura unghiului la centru al sectorului în care apare nota 8?

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Număr de elevi	2	3	3	6	5	3	3

●●●●▶ Alege și rezolvă în 5 minute!

Vânzările de televizoare de la un magazin de electronice, din semestrul al doilea, sunt următoarele:

Luna	iulie	august	septembrie	octombrie	noiembrie	decembrie
Nr. aparate	120	100	80	160	255	385

A

Calculează efectivul total al studiului.

B

Determină câte aparate s-au vândut în plus în luna cu cele mai bune vânzări față de luna cu cele mai slabe vânzări.

C

Exprimă în procente totalul vânzărilor înregistrate în ultimele trei luni menționate.

●●●●▶ O situație-problemă

Directorul unui muzeu a alcătuit o statistică cu numărul grupurilor de elevi care au vizitat muzeul, în cadrul programului *Școala altfel*: datele sunt prezentate în tabelul alăturat. Cum ar trebui să prelucreze și să folosească conducerea muzeului aceste date, pentru a lua decizii argumentate?

Vrem să știm! ▶▶▶

Care sunt indicatorii cu ajutorul cărora putem analiza și interpreta semnificația unui set de date statistice?

Ziua	Nr. de grupuri
L	50
M	54
M	46
J	68
V	42

●●●●▶ Să analizăm!

Notele obținute la un test de elevii claselor a VIII-a A și a VIII-a B sunt prezentate în tabelele următoare.

	Clasa a VIII-a A							
Nota	3	4	5	6	7	8	9	10
Număr de elevi	1	2	2	3	7	4	5	1

	Clasa a VIII-a B					
Nota	5	6	7	8	9	10
Număr de elevi	4	8	1	8	1	2

Pentru a interpreta și a compara rezultatele elevilor celor două clase, putem folosi următorii indicatori statistici:



Definiții

Populația – reprezintă numărul de participanți

Media – se calculează prin însumarea valorilor și împărțirea la numărul lor.

Modul (dominanta) – este clasa statistică (valoarea) care apare cel mai mult în setul de valori.

Mediana – este numărul situat la mijloc sau media celor două numere care sunt situate la mijloc, în ordinea crescătoare a valorilor.

Amplitudinea – este diferența dintre cea mai mare și cea mai mică valoare din setul de date.

Exemple

În clasa a VIII-a A sunt **25** de elevi, iar în clasa a VIII-a B sunt **24** de elevi. Aceste numere reprezintă populația studiului.

Mediile celor două clase sunt:

$$M_A = \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 4 + 9 \cdot 5 + 10 \cdot 1}{25} = 7$$

$$M_B = \frac{5 \cdot 4 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 8 + 9 \cdot 1 + 10 \cdot 2}{24} = 7$$

Modul este **7** pentru clasa a VIII-a A, deoarece nota 7 a fost luată de cei mai mulți elevi.
Seria de note de la clasa a VIII-a B are două valori modale: **6** și **8**.

Pentru clasa a VIII-a A, seria notelor în ordine crescătoare este:
3; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 6; 7; 7; 7; 7; 7; 7; 8; 8; 8; 8; 9; 9; 9; 9; 10.

Mediana este 7: aceasta este nota de pe poziția a 13-a (situată la mijloc).

Pentru clasa a VIII-a B, seria notelor în ordine crescătoare este:
5; 5; 5; 5; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 7; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 9; 10; 10.

Mediana este egală cu 6,5, deoarece la mijloc (pe pozițiile 12 și 13) se află notele 6 și 7.

Pentru clasa a VIII-a A, amplitudinea setului de date este $10 - 3 = 7$, iar pentru clasa a VIII-a B este $10 - 5 = 5$.

Folosind indicatorii statistici calculați mai sus, putem formula următoarele concluzii:

- Cele două clase au aceeași medie a notelor la test.
- La clasa a VIII-a A există o mai mare împrăștiere a notelor, evidențiată de amplitudinea mai mare. Există o singură dominantă, deoarece cei mai mulți elevi au nota 7.
- La clasa a VIII-a B sunt mai multe note mici decât la clasa a VIII-a A, deoarece mediana este mai mică. La această clasă, notele sunt însă mai "grupate".

●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

Pentru datele luate în considerare de conducerea muzeului, indicatorii statistici sunt: Media = 52; Mediana = 50; Amplitudinea = 26. Aceste date arată că, în medie, muzeul a fost vizitat în săptămâna *Școala altfel* de 52 de grupuri zilnic, cele mai multe grupuri fiind în ziua de joi (68). Există o diferență destul de mare de vizitatori între diferite zile – unele zile au fost foarte aglomerate. De aceea, pentru viitor, conducerea muzeului a decis să organizeze vizitele pe baza unor programări făcute din timp.

**Gândim critic
și constructiv!**

În exemplele anterioare, am lucrat cu un număr mic de date. Dacă însă numărul datelor cu care lucrăm este foarte mare, iar acestea sunt împărțite pe clase reprezentate de intervalele $[a_1, a_2)$, $[a_2, a_3)$, ..., $[a_n, a_{n+1})$, atunci valorile $x_1, x_2, \dots, x_n$ din formula mediei se înlocuiesc cu valorile corespunzătoare mijloacelor intervalelor, adică $(a_1 + a_2) : 2$, $(a_2 + a_3) : 2$, ..., $(a_n + a_{n+1}) : 2$.

Să considerăm, de exemplu, rezultatele evaluării naționale la matematică din 2024, publicate de Ministerul Educației (https://www.edu.ro/comunicat_presa_19_2024_sinteza_rezultate_simulare_ENVIII2024), prezentate în tabelul următor.

Interval de notare	1 - 4,99	5 - 5,99	6 - 6,99	7 - 7,99	8 - 8,99	9 - 10
Frecvența (%)	27%	24%	15%	13%	11%	10%

În lipsa altor informații, putem reorganiza aceste date statistice considerând, în locul claselor statistice determinate de intervalele de notare, nota din mijlocul acestor intervale. Obținem rezultatele statistice următoare:

Nota medie	3	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
Frecvența (%)	27%	24%	15%	13%	11%	10%

Folosește datele „simplificate” și estimează media tuturor celor 214.692 note la matematică de la examenul de evaluare națională din 2024.

●●●●▷ Evaluăm nivelul de bază

În echipa de atletism a școlii sunt: 2 elevi cu vârsta de 11 ani, 4 elevi de 12 ani, 5 elevi de 13 ani și 4 elevi de 14 ani. **1.** Calculează vârsta medie a elevilor echipei de atletism. **2.** Precizează dominanta setului de date.

●●●●▷ Probleme propuse

- 1. Adevărat sau fals?** Dacă media notelor obținute de elevii unei clase la un test este 8, atunci există sigur un elev care a luat nota 8.
- 2.** Pentru a fi admis la un club de științe, un elev trebuie să obțină minim nota 9 ca medie ponderată a mediilor de la matematică, fizică, chimie și biologie, cu ponderile 3, 3, 2, respectiv 2. Va fi admis la club un elev cu media 9 la matematică, 8 la fizică, 10 la chimie și biologie?
- 3.** Completează un tabel de date, pentru a arăta de câte ori apare fiecare literă în propoziția: ACESTA ESTE UN STUDIU STATISTIC FOARTE INTERESANT. Calculează apoi dominanta setului de date și media frecvențelor de apariție a literelor.
- 4.** Copiii dintr-un grup au declarat că părinții îi lasă să petreacă zilnic la calculator: 45 min, 1 h 30 min, 1 h, 30 min, 1 h 15 min, 1 h 45 min. Află amplitudinea setului de date prezentate.
- 5.** Temperaturile înregistrate într-o localitate, timp de 10 zile, sunt următoarele: 12°C, 11°C, 10°C, 12°C, 9°C, 11°C, 11°C, 8°C, 9°C, 10°C. Determină: temperatura medie a perioadei; modul și mediana setului de date.
- 6. Alege răspunsul corect!** Un magazin sportiv oferă la vânzare biciclete cu prețuri între 900 lei și 2300 lei. Care dintre următoarele nu ar putea fi valoarea medie a prețurilor celor 250 de biciclete din magazin? **A)** 1600 **B)** 2200 **C)** 900 **D)** 1000

★★

7. Alege răspunsul corect! Dintre afirmațiile următoare, cea care folosește media unui set de date este:

- a) Consumul de alcool este cauza pentru mai mult de jumătate din accidente de circulație.
- b) Conform recensământului populației, în România există 82 locuitori/km².
- c) La vânzările de pantofi pentru bărbați, măsura cea mai vândută este 27.
- d) Anul trecut, în Oradea au venit aproximativ 237.000 de turiști.

★★★

10. Într-o papetărie se găsesc modele de pixuri cu prețuri diferite. Administratorul face inventarul și completează tabelul:

Preț (lei)/pix	4	5	6	8	10	15
Număr pixuri	280	225	180	152	158	40

Determină: a) câte pixuri sunt în total în depozit; b) câte pixuri cu prețul mai mic de 8 lei sunt în depozit; c) prețul mediu al unui pix; d) amplitudinea, dominantă și mediana seriei.

★★★★

12. **Investigație.** Tabelul prezintă frecvența literelor în cuvinte din limba română.

	%		%		%		%
A	10,3	F	1,4	L	4,3	S/Ș	6,0
Ă/Î	5,5	G	0,9	M	3,4	T/Ț	6,9
B	1,0	H	0,4	N	6,6	U	6,1
C	5,6	I	10,4	O	3,9	V	1,2
D	3,5	J	0,2	P	3,1	X	0,1
E	11,7	K	0,1	R	6,7	Z	0,7

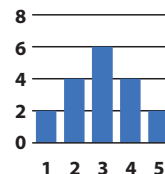
- a) Alegeți la întâmplare o literă dintr-un text oarecare în limba română. Care literă este cel mai probabil să fi fost aleasă? De ce?
- b) Folosind informațiile din tabel, încercați să descoperiți ce mesaj a fost codificat mai jos. (Fiecare simbol înlocuiește peste tot o aceeași literă, iar & înseamnă spațiu.)

⇒~& □↓Δ⇒~⊕& ⇒⊙& ►□⊕↓◆↓⊙~&
 □Δ⊙& ♣Δ⊕↓⊙& ⊙✕◆✕⇒~&
 ⇒⊕⇒⊕~⇒⊕~⇒⊕~& ►□& ✕✕⊙↓□~&
 ⊙✕⇒□⊕↓& ✕~v↓□⇒↓& □Δ⊙& ⇒□&
 ⊙~& ✕↓& ↓x↓⊙♣◆Δ& ✕↓□✕✕⇒□↓&
 Δ□✕□& ⊙↓⇒⇒j↓

8. Care ar putea fi cele 8 note primite de un elev la matematică, dacă media acestor note este 7,25, mediana este 7,5, iar amplitudinea setului de note este 6?

Propune cel puțin două soluții.

9. Precizează media și mediana setului de date reprezentate alăturat, fără a face calcule!

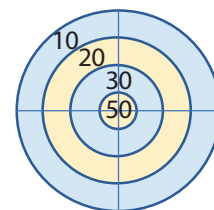


11. La o bancă se notează depunerile zilnice. Joi s-au înregistrat datele din tabel.

Suma în mii de lei	[0;2)	[2;5)	[5;10)	[10;20)	[20;50]
Nr. de depuneri	45	54	24	12	8

Determină: a) modul setului de date; b) amplitudinea setului; c) valoarea medie a depunerilor; d) numărul de depuneri de cel puțin 5000 lei.

13. Sportivii A și B se întrec la proba de tir, în vederea selecției unuia din ei pentru un concurs. Rezultatele obținute sunt prezentate în tabel.

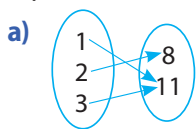


Punctaj	50	30	20	10	0
A	4	6	5	4	1
B	6	3	5	3	3

- a) Pot fi departajați sportivii prin calculul mediei setului de date?
 - b) Pentru fiecare dintre sportivi, precizează mediana și dominantă setului de date.
 - c) Antrenorul a decis să ia în calcul doar cele mai bune 10 rezultate. Care dintre sportivi ar trebui ales pe baza acestor rezultate?
14. În cadrul unui studiu statistic, au fost calculate media, mediana și dominantă (modul) pentru prețurile tuturor articolelor dintr-un magazin. De Black Friday, a fost făcută o reducere cu 20% a tuturor prețurilor. Cum se modifică media, mediana și modul pentru datele ce reprezintă noile prețuri?

●●●●▷ Recapitulăm prin probleme

1. Decide care dintre corespondențele următoare reprezintă o funcție:



b)

t	1	2	3
$d(t)$	2	4	6

c)

Ziua	L	M	M	J	V	S	D
Temperatura	6°	-	8°	5°	6°	9°	7°

d) $f: \{2; 4; 6\} \rightarrow \{0; 3; 5\}$,
 $f(2) = 5, f(4) = 3, f(6) = 0$

5. Scrie câte o lege de corespondență pentru fiecare din funcțiile descrise în tabelele următoare.

x	3	5	$2\sqrt{3}$	7	0,5	-1
$f(x)$	0	2	$2\sqrt{3}-3$	4	-2,5	-4

x	-3	-1	0	$\sqrt{2}$	1,5	0,2
$g(x)$	-15	-5	0	$5\sqrt{2}$	7,5	1

x	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$	4	1	-2	-5	-8	-11

6. Determină $a \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $A(-a, a+6)$ aparține reprezentării grafice a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -ax + 4$.
7. Determină coordonatele punctelor de intersecție cu axele de coordonate ale graficelor următoarelor funcții: a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 3$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x + 6$; c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 2$.

11. Determină mulțimea ordonatelor punctelor situate pe reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x + 8$, a căror abscisă este mai mare decât 2.

★★★★

13. Stabilește natura patrulaterului determinat de reprezentările grafice ale funcțiilor $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = 2x$, $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = 2(x-2)$, $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = 2$ și $f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_4(x) = -2$ și calculează aria sa.
14. Geo a realizat un grafic sugestiv cu câștigătorii campionatului mondial de fotbal.
- a) Datele sunt proporționale cu raza, cu aria, sau cu volumul mingilor din imagine?
- b) Realizează o altă reprezentare a acestor date.



Brazilia
5

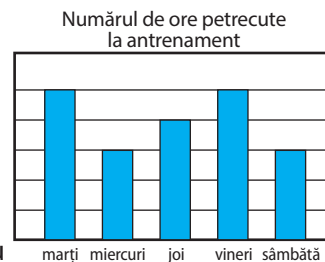


Germania/Italia
4



Argentina
3

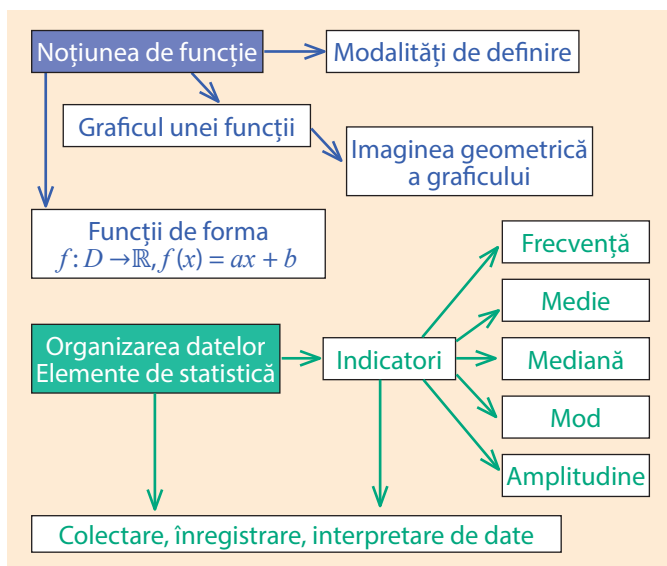
2. Geo are, la matematică, notele: 9; 8; 7; 10; 7; 9. Calculează media și mediana notelor lui Geo. Organizează aceste note într-un tabel și apoi reprezintă printr-un grafic cu bare aceste date.
3. Descrie printr-o diagramă și apoi printr-un tabel funcțiile următoare: a) $f: \{-1; 2; 6\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$; b) $f: \{-2; -1; 2; 3\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 - x$.
4. Reprezintă grafic funcțiile următoare, într-un sistem ortogonal de axe: a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 2$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4 - 2x$; c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3$.
8. Reprezintă grafic, într-un reper cartezian xOy , următoarele funcții: a) $f: [-1; 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 2$; b) $f: (0; 4) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 2$; c) $f: [0; 3) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 5$; d) $f: (1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3$.
9. Diagrama prezintă numărul de ore petrecute de Tic la antrenamentul de tenis. Calculează media, mediana, modul și amplitudinea pentru acest set de date.



10. La un test, elevii unei clase au obținut următoarele note: 9, 7, 7, 8, 4, 6, 5, 6, 7, 8, 8, 10, 4, 10, 5, 6, 6, 7, 9, 8, 9, 9, 7, 5.
- a) Organizează datele culese într-un tabel.
- b) Reprezintă grafic datele.
- c) Calculează media clasei, mediana, modul și amplitudinea seriei de date.

12. Stabilește dacă punctele sunt coliniare:
- a) $A(2;1), B(1;0), C(0;-1)$;
- b) $D(-2;3), E(-1;2), F(2;-1)$;
- c) $G(2;4), H(3;-1), K(-2;0)$.

Ce am învățat?



Utilizează schema de mai sus și adaugă în portofoliu elementele esențiale din lecțiile unității 4, referitoare la conceptele menționate.

Testul 1

- Alege răspunsul corect! În șirul de numere: 1, 3, 4, 7, ..., fiecare termen, începând cu al treilea, este suma celor doi termeni anteriori. Următorul termen al șirului este:
a) 10; b) 11; c) 13; d) 15.
- Reprezintă grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$.
- Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, al cărei grafic este reprezentat în imaginea alăturată. Observă graficul, apoi:
a) precizează $f(1)$;
b) rezolvă inecuația $f(x) > 0$.
- Adevărat sau fals? Punctele $A(-1; 0)$; $B(0; 1)$ și $C(34; 35)$ sunt coliniare.
- În tabelul de mai jos este înregistrată durata, în minute, a drumului până la școală parcurs de elevii unei clase.
a) Calculează durata medie a drumului.
b) Determină dominantă (modul) seriei statistice date.

Timpul	(0;5]	(5;10]	(10;15]	(15;20]	(20;25]
Nr. elevi	4	12	10	3	1

Rezolv testele pentru a verifica dacă pot:

- să identific dependențe funcționale în situații date
- să reprezint o funcție în diverse moduri
- să formulez proprietăți ale unei funcții, observând graficul acesteia
- să justific coliniaritatea a trei puncte reprezentate într-un sistem cartezian
- să interpretez semnificația indicatorilor tendinței centrale a unui set de date

Testul 2

- Alege răspunsul corect! În șirul de numere: 1, 2, 3, 6, ..., fiecare termen, începând cu al treilea, este suma tuturor termenilor anteriori. Următorul termen al șirului este:
a) 9; b) 10; c) 11; d) 12.
- Reprezintă grafic funcția $f: \{-1; 0; 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - x$.
- Considerăm funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, al cărei grafic este reprezentat în imaginea alăturată. Observă graficul, apoi:
a) precizează mulțimea D ;
b) rezolvă ecuația $f(x) = 1$.
- Adevărat sau fals? Punctele $A(1; 0)$; $B(2; 1)$ și $C(44; 45)$ sunt coliniare.
- În tabelul de mai jos sunt înregistrate temperaturile măsurate în grade Celsius de la o stație meteo, în decurs de o lună.
a) Calculează frecvența relativă, exprimată în procente pentru temperatura de 13° ;
b) Determină temperatura medie a lunii respective.

Temperatura	10°	11°	12°	13°	14°	15°
Nr. de zile	4	2	8	5	5	6

Proiect: *De la plan la spațiu*

Plan de lucru

- **Scop:** Veți confecționa corpuri geometrice, ale căror proprietăți le veți explora în această unitate de învățare.
- **Materiale necesare:** coli de carton subțire, riglă, compas, foarfecă, bandă scotch, markere colorate.

Realizarea proiectului

Lucrați în echipe de câte trei, patru sau cinci colegi!

- Realizați corpuri geometrice, folosind desfășurările din imaginea alăturată, după ce le-ați desenat și colorat pe carton subțire.
- Puneți-vă imaginația la încercare și creați compoziții plastice.
- Atașați o fișă cu probleme propuse și probleme rezolvate despre corpurile pe care le-ați realizat.

Pentru început:

- Observați că în fiecare desen apare cel puțin un pătrat.
- Considerând latura pătratului egală cu 1 dm, determinați perimetrul fiecărei figuri, ținând cont de faptul că fiecare poligon este regulat, iar două laturi care au un vârf comun sunt congruente.



Interacționați în echipa voastră, realizați corpuri geometrice și propuneți probleme despre acestea, apoi **prezentați** în clasă rezultatele proiectului.

Autoevaluare

✓ Rezolvă problemele și alege răspunsurile corecte, pentru a verifica ce știi la început de unitate de învățare.

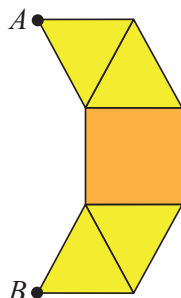
1. Măsura unui unghi al unui hexagon regulat este:

- A) 90° B) 60° C) 30° D) 120°

2. Figura este formată prin alipirea unui pătrat și a patru triunghiuri echilaterale.

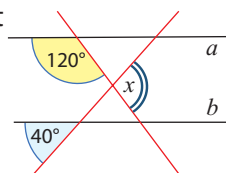
Dacă perimetrul figurii este de 16 cm, atunci lungimea segmentului AB (în cm) este:

- A) 4 B) $2(1 + \sqrt{3})$
C) $4\sqrt{3}$ D) 6



3. Dreptele a și b din figură sunt paralele. Măsura unghiului notat cu x este de:

- A) 90° B) 100°
C) 110° D) 120°

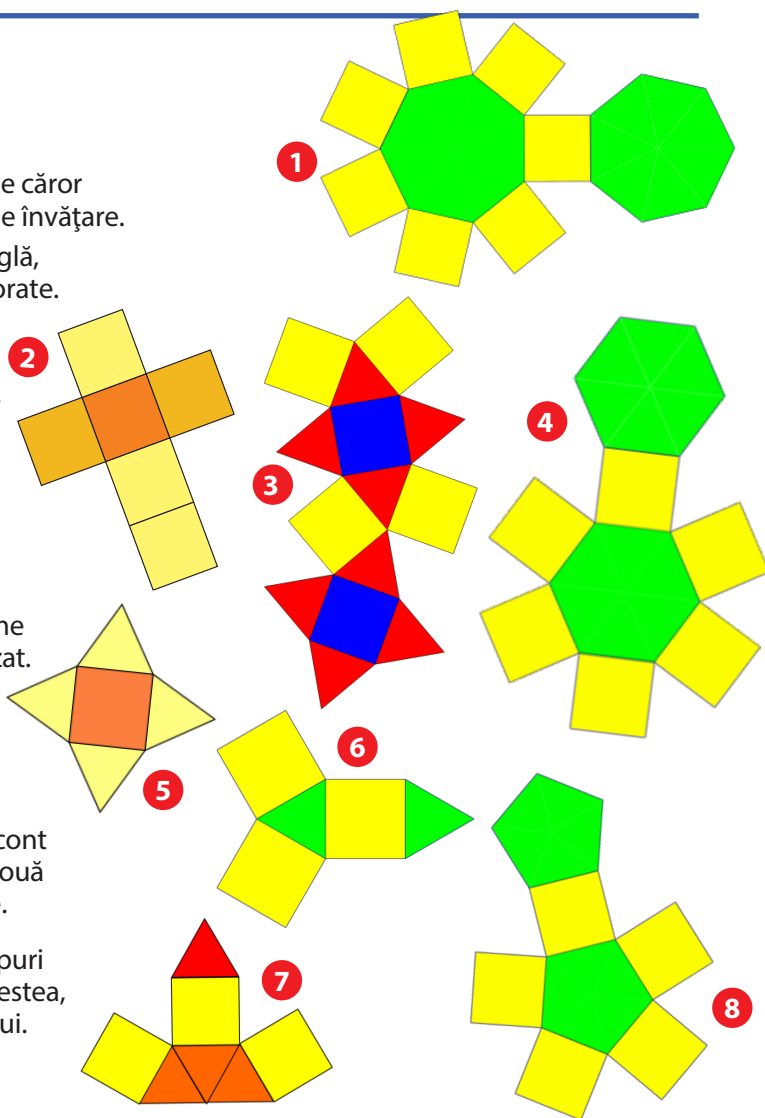


4. Perimetrul unui triunghi echilateral este de 24 cm. Lungimea unei linii mijlocii a triunghiului este:

- A) 12 cm B) 16 cm C) 6 cm D) 4 cm

5. Suma lungimilor tuturor muchiilor unui cub este 36 cm. Aria unei fețe a cubului este:

- A) 9 cm² B) 6 cm² C) 3 cm² D) 1296 cm²



Ce știi deja? Verific!

Test de (auto)evaluare

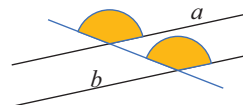
Timp de lucru: 45 minute

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni și rezultate necesare pentru parcurgerea acestei Unități de învățare. Fiecare problemă propusă valorează 1 punct. Se acordă 1 punct din oficiu.

I. Scrie pe foaia de rezolvare cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate formează enunțuri adevărate.

Drepte paralele
tăiate de o secantă

1. Dreptele a și b din figură sunt drepte paralele. Unghiurile congruente, marcate prin culoare pe figură, se numesc unghiuri ...



Cubul

2. Numărul muchiilor unui cub este ...

Unghiul a două
drepte

3. Cele trei drepte concurente din imagine formează, două câte două, unghiuri de măsuri egale. Măsura fiecărui unghi este de ... °.



Centrul de
greutate

4. În orice triunghi, centrul de greutate este punctul de intersecție a ... triunghiului.

II. Scrie pe foaia de rezolvare litera corespunzătoare răspunsului corect pentru problemele următoare.

Proprietăți ale
paralelogramului

5. Unul dintre unghiurile paralelogramului din imagine are măsura de 48° . Măsura unghiului reprezentat prin culoare pe figură este de:

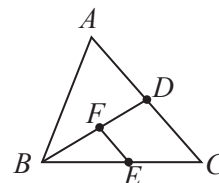
A) 48° B) 90° C) 120° D) 132°



Linia mijlocie
în triunghi

6. În figura alăturată, punctele D , E și F sunt mijloacele segmentelor pe care se află. Dacă $AC = 12$ cm, atunci lungimea segmentului EF , exprimată în cm, este:

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6



III. Scrie pe foaia de rezolvare soluțiile complete ale problemelor următoare.

Linia mijlocie
în trapez

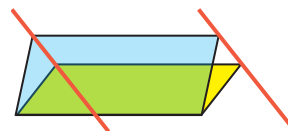
7. Un trapez din hârtie este tăiat de-a lungul liniei sale mijlocii. Demonstrează că, prin alăturarea într-un anumit fel a celor două părți astfel obținute, se poate forma un paralelogram.

Poziții relative ale
dreptelor din plan

8. Desenează un triunghi și liniile mijlocii ale acestuia. Trasează apoi o dreaptă ce intersectează laturile și liniile mijlocii ale triunghiului (sau prelungirile acestora) în cât mai puține puncte. Justifică răspunsul.

Proprietăți ale
dreptelor paralele

9. În figura alăturată apar două paralelograme cu o latură comună. Demonstrează că dreptele marcate prin culoare, determinate de vârfuri ale paralelogramelor date, sunt paralele.



Dacă ai obținut mai puțin de jumătate din punctaj la acest test, este util să revezi definițiile și proprietățile verificate mai sus, pentru a înțelege mai bine ceea ce urmează.

●●●●▷ O situație-problemă

Pentru scrierea numerelor, mayașii foloseau doar două simboluri: puncte și segmente. Să observăm împreună un tabel cu reprezentarea numerelor de la 1 la 20.

Ce număr reprezintă scrierea: $\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$?

$\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot\cdot$	—
$\cdot\text{—}$	$\cdot\cdot\text{—}$	$\cdot\cdot\cdot\text{—}$	$\cdot\cdot\cdot\cdot\text{—}$	$\text{—}\text{—}$
$\cdot\text{—}\text{—}$	$\cdot\cdot\text{—}\text{—}$	$\cdot\cdot\cdot\text{—}\text{—}$	$\cdot\cdot\cdot\cdot\text{—}\text{—}$	$\text{—}\text{—}\text{—}$
$\cdot\text{—}\text{—}\text{—}$	$\cdot\cdot\text{—}\text{—}\text{—}$	$\cdot\cdot\cdot\text{—}\text{—}\text{—}$	$\cdot\cdot\cdot\cdot\text{—}\text{—}\text{—}$	$\text{—}\text{—}\text{—}\text{—}$

Vrem să știm! >>>

Ce convenții de desen, notații și raționament folosim în geometria în spațiu?

●●●●▷ Ne amintim și extindem

Punctele, dreptele și planele sunt modele matematice construite pornind de la realitatea înconjurătoare. Ele nu se definesc: pot fi doar descrise și reprezentate prin convenții de desen și notații.

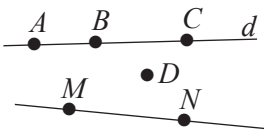
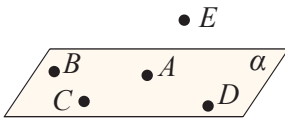
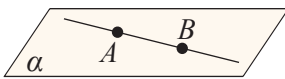
Descriem	Reprezentăm și notăm	Citim
Punctul ni-l imaginăm ca fiind urma lăsată de vârful unui creion, bine ascuțit, pe o foaie de hârtie.	$\begin{array}{cc} A & B \\ \bullet & \times \end{array}$	Punctul A Punctul B
Dreapta ne-o imaginăm ca pe un fir de ață foarte subțire, bine întins și nemărginit, căruia nu-i luăm în considerare grosimea.	$\text{—}\text{—}\text{—}\text{—}\text{—}\text{—}\text{—}\text{—}\text{—}\text{—}$ d	Dreapta d
Planul ni-l imaginăm ca fiind o suprafață plată și netedă, nemărginită, fără grosime.	 α	Planul α

●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

Observăm tabelul și înțelegem că, în scrierea mayașă, erau folosite următoarele convenții: un punct reprezintă o unitate, iar un segment reprezintă 5 unități. De aceea, scrierea $\text{—}\text{—}\text{—}$ reprezintă numărul 27. Mayașii foloseau convenții de notație pentru numere, așa cum și noi folosim convenții și notații în geometrie.

●●●●▷ Definim relații!

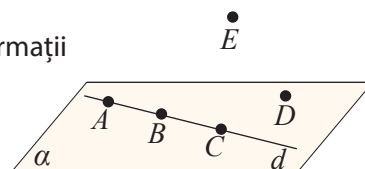
Dreapta și planul sunt **mulțimi de puncte**. De aceea, exprimăm **relațiile** dintre puncte, drepte și plane folosind simbolurile de apartenență ($\in$) sau de incluziune ($\subset$).

Enunțăm	Reprezentăm și notăm	Exprimăm
Un punct poate fi pe o dreaptă, sau poate fi exterior dreptei. Trei sau mai multe puncte sunt coliniare dacă există o dreaptă care conține aceste puncte. Orice două puncte sunt coliniare.		$C \in d, D \notin d$. Punctele A, B, C sunt coliniare. Punctele M și N se găsesc pe dreapta MN .
Un punct poate fi într-un plan, sau poate fi exterior planului. Mai multe puncte sunt coplanare dacă există un plan care conține aceste puncte.		$A \in \alpha, E \notin \alpha$. Punctele A, B, C, D sunt coplanare.
O dreaptă este inclusă într-un plan dacă orice punct al dreptei aparține planului. Dacă o dreaptă are două puncte în comun cu un plan, atunci dreapta este conținută în plan.		Dreapta AB este inclusă în planul α , deoarece $A \in \alpha$ și $B \in \alpha$. Scriem: $AB \subset \alpha$

●●●●▷ Evaluăm nivelul de bază

Observă imaginea alăturată, apoi decide care din următoarele afirmații sunt adevărate și care sunt false.

- a) $A \in d$; d) Punctele A, B, C sunt coliniare;
 b) $B \notin d$; e) Punctele A, B, C, D sunt necoplanare;
 c) $D \in \alpha$; f) Punctul E este exterior planului α .

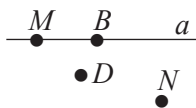


●●●●▷ Probleme propuse

1. Alege răspunsul corect! Care dintre următoarele notații înseamnă că toate punctele dreptei d se găsesc în planul a ?

A) $d \subset a$ B) $d \not\subset a$ C) $d \in a$ D) $d \notin a$

2. Descrie imaginea alăturată, folosind simbolurile $\in$; $\notin$.



4. Realizează și notează un desen prin care reprezinti planul p și punctele A, B, C, D care îndeplinesc simultan condițiile:

- a) Punctele A, B, D aparțin unei drepte incluse în planul p ;
 b) Punctul C nu aparține planului p .

5. În planul foi de hârtie, desenează și notează punctele M, N, P, Q astfel ca M, N, P să fie coliniare, dar N, P, Q să fie necoliniare.

6. Punctul C este mijlocul segmentului AB , iar A și B sunt în planul α . Demonstrează că $C \in \alpha$.

8. Punctele A, B, C sunt coliniare, iar A și B aparțin planului α . Ce poziție are punctul C față de planul α ? Justifică răspunsul!

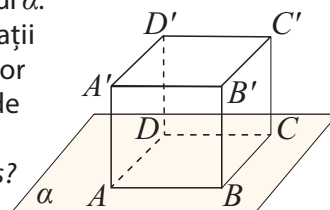
9. Stabilește pozițiile punctelor D, E și F , în următoarele cazuri:

- a) $DE = 3$ cm, $DF = 8$ cm și $EF = 5$ cm;
 b) $DE = 3$ cm, $DF = 6$ cm și $EF = 5$ cm.

12. Colorăm punctele unei drepte cu albastru sau roșu. Demonstrează că există trei puncte de aceeași culoare, astfel încât unul dintre ele este mijlocul segmentului determinat de celelalte două puncte.

3. Figura prezintă cubul $ABCD A' B' C' D'$ așezat cu fața $ABCD$ pe planul α .

- a) Descrie prin notații pozițiile punctelor A, C, A', B' față de planul α .
 b) Adevărat sau fals? $BB' \subset \alpha$.



7. Investigație

- a) Folosește rigla și compasul pentru a construi un triunghi în care lungimile laturilor sunt de 4 cm, 5 cm, 6 cm.
 b) Încearcă să construiești un triunghi în care lungimile laturilor sunt de 4 cm, 5 cm și 10 cm, apoi un triunghi cu lungimile laturilor de 4 cm, 5 cm și 9 cm. Ce observi?
 c) Justifică proprietatea: Dacă $AB + AC = BC$, atunci punctele A, B, C sunt coliniare.
 d) Dacă $MN + NP = MP$ și M, N sunt puncte distincte din planul α , atunci $P \in \alpha$.



10. Câte drepte distincte care conțin cel puțin două dintre A, B, C există?

11. Considerăm 20 de puncte distincte. Construim toate dreptele ce trec prin câte două dintre aceste puncte. a) Care este numărul minim de drepte distincte obținute? b) Dar cel maxim? c) Putem obține 188 de drepte distincte?

13. Colorăm punctele unui plan cu albastru sau cu roșu. Demonstrează că există în acest plan un triunghi echilateral, cu vârfurile de aceeași culoare.

●●●●▷ Alege și rezolvă în 5 minute!

A

Realizează un desen în care reprezinti planul α și punctele A, B, C astfel încât $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$, iar $AC \subset \alpha$.

B

Se consideră punctele A, B, C , astfel încât $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm și $BC = 10$ cm. Stabilește dacă A, B, C sunt coliniare.

C

Considerăm 6 puncte distincte într-un plan și un punct în exteriorul planului. Stabilește numărul maxim de drepte care trec prin câte două dintre aceste puncte.

O situație-problemă

Geo a observat că fiecare ușă se rotește în jurul tocului cu două balamale. De asemenea, el a mai observat că o măsuță cu trei picioare este stabilă. Oare observațiile lui au legătură cu anumite proprietăți geometrice?

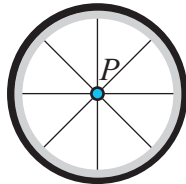
Vrem să știm! Ce condiții determină o dreaptă sau un plan?



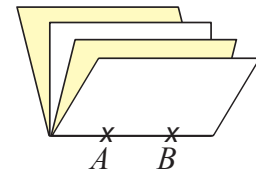
Comparăm, observăm și generalizăm!

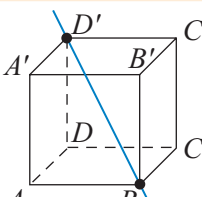
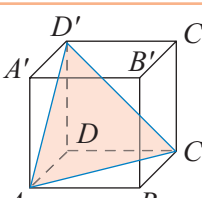
O figură geometrică este **determinată** dacă sunt precizate elementele prin care aceasta se poate identifica în mod unic.

O roată de bicicletă ne arată că un punct nu determină o dreaptă, deoarece punctul P aparține oricărei spițe a roții.



Un caiet deschis ne arată că două puncte nu determină un plan, deoarece punctele A și B aparțin planului oricărei file a caietului.



Enunțăm	Exemplificăm	Precizăm
Axioma dreptei Două puncte distincte determină o dreaptă. Există trei puncte necoliniare.	 În cubul $ABCD A' B' C' D'$: – punctele B și D' sunt distincte: ele determină dreapta BD'; – punctele A, B, D sunt necoliniare.	Dacă două drepte au în comun două puncte, atunci dreptele coincid.
Axioma planului Trei puncte necoliniare determină un plan. Există patru puncte necoplanare.	 În cubul $ABCD A' B' C' D'$: – punctele A, C și D' sunt necoliniare: ele determină planul (ACD'); – punctele A, B, C, D' sunt necoplanare.	Dacă două plane au în comun trei puncte necoliniare, atunci planele coincid.

Rezolvăm situația-problemă

Ușa poate fi considerată un plan ce se rotește în jurul dreptei determinată de balamalele acesteia. Atunci când ușa este închisă cu zăvorul, ea nu se mai mișcă, deoarece poziția ei este determinată unic de cele 3 puncte necoliniare – două balamale și zăvorul. O măsuță cu 3 picioare este stabilă din același motiv – extremitățile picioarelor sunt 3 puncte necoliniare, care determină un plan.

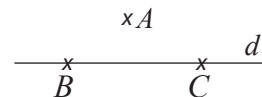
Să demonstrăm!

Teorema 1 O dreaptă și un punct exterior acesteia determină un plan.

Demonstrație:

Notăm cu d dreapta și cu A punctul exterior ei. Alegem punctele distincte $B, C \in d$. Punctele necoliniare A, B, C determină planul α , care conține dreapta d și punctul A . Orice alt plan β care conține d și A coincide cu planul α , deoarece α și β au în comun punctele necoliniare A, B, C .

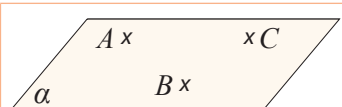
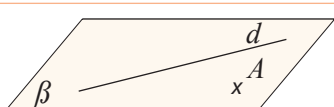
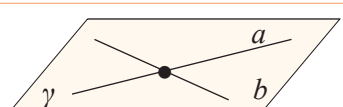
Teorema 2 Două drepte concurente determină un plan.



Demonstrează Teorema 2, folosind aceleași argumente ca în demonstrația Teoremei 1: notează cu A punctul de intersecție a dreptelor și alege pe fiecare dintre dreptele încă un punct, diferit de A .

Gândim critic și constructiv!

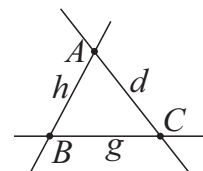
În concluzie:

 Desenăm			
Notăm	$\alpha = (ABC)$	$\beta = (d; A)$	$\gamma = (a; b)$
Interpretăm	Planul α este determinat de punctele A, B și C	Planul β este determinat de dreapta d și de punctul A	Planul γ este determinat de dreptele concurente a și b

●●●●▷ Problemă rezolvată

Demonstrează că, dacă trei drepte neconcurente toate trei se intersectează două câte două, atunci ele sunt coplanare.

Demonstrație: Fie d, g, h cele trei drepte și fie A, B, C punctele de intersecție două câte două ale acestor drepte. Dacă α este planul determinat de punctele necoliniare A, B, C , atunci $h, g, d \subset \alpha$, deoarece au câte două puncte în acest plan.

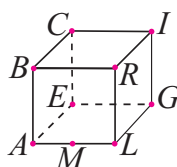


●●●●▷ Probleme propuse

1. Adevărat sau fals? Oricare trei vârfuri ale unui cub sunt situate într-un plan.

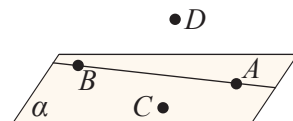
2. Adevărat sau fals? Orice trei puncte distincte determină un plan.

3. În cubul *ALGEBRIC*, notăm cu M mijlocul laturii AL . Care dintre următoarele elemente determină un plan?



a) dreapta AL ; b) dreptele AL și MG ; c) punctele A, M, L și R .

4. Alege răspunsul corect! Ce elemente din imaginea alăturată NU determină un plan?



A) punctele A, B, C B) dreptele AB și AC
C) dreptele AC și AD D) dreptele AC și BD .

5. Observă imaginea alăturată în care apare o ladă umplută cu nisip. Explică, folosind proprietățile geometrice studiate anterior, de ce și cum se poate nivela nisipul cu ajutorul unei rigle.

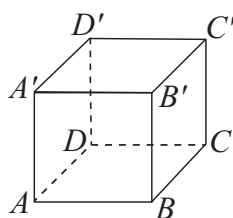


6. a) Punctele A, B, C, D sunt oricare trei coliniare. Demonstrează că toate aceste puncte sunt coliniare.
b) Punctele A, B, C, D, E sunt oricare patru coplanare. Demonstrează că toate aceste puncte sunt coplanare.

7. Fie 6 puncte, oricare 4 necoplanare. Colorăm segmentele determinate de câte două dintre acestea cu roșu sau albastru. Demonstrează că, oricum ar fi distribuite culorile, există un triunghi cu laturile de aceeași culoare. Rămâne concluzia adevărată, dacă inițial sunt 5 puncte?

8. Pe conturul unui semidisc din carton de diametru AB , fixăm punctele C și D , astfel încât $AD \cap BC = \{T\}$. Construim $TO \perp AB$, cu $O \in AB$. Îndoim semidiscul după dreapta TO . Arată practic și demonstrează că A, B, C, D rămân coplanare după îndoire.

●●●●▷ Alege și rezolvă în 5 minute!



Considerăm cubul $ABCD A'B'C'D'$.

A

Justifică dacă dreptele AA' și AC determină un plan.

B

Numără câte drepte sunt determinate de câte două dintre punctele $A; D; D'; C'$.

C

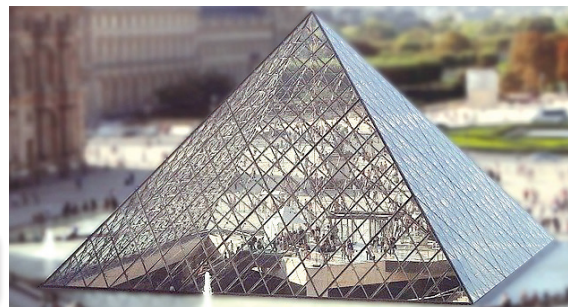
Alegem la întâmplare trei vârfuri ale cubului. Care este probabilitatea ca vârfurile alese să nu determine un plan?

●●●●▷ O situație-problemă

Intrarea în muzeul Luvru din Paris este construită în întregime din metal și sticlă. Dintr-un ghid turistic, aflăm că sunt în total 603 ochiuri de sticlă în formă de romb și 70 bucăți de formă triunghiulară. Câte astfel de ochiuri de sticlă sunt, aproximativ, pe fiecare față a construcției?

Vrem să știm! >>>

Ce corp geometric are forma construcției de alături? Ce proprietăți are acest corp geometric?

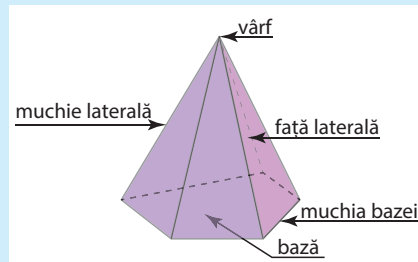


➔ 1. Ce este o piramidă?

Definiții >>>



- Corpul geometric determinat de un poligon (numit **bază**) și de un punct exterior poligonului (numit **vârf**) se numește **piramidă**.
- Laturile poligonului se numesc de **muchiile bazei**, segmentele cu o extremitate în vârful piramidei și cealaltă într-unul din vârfurile bazei se numesc **muchiile laterale**, iar triunghiurile determinate de vârf și o latură a bazei se numesc **fețele laterale**. **Fețele piramidei** sunt baza și fețele laterale, iar **muchiile piramidei** sunt muchiile laterale și laturile bazei.



- **Piramida regulată** este piramida cu baza poligon regulat și muchiile laterale congruente.
- Înălțimile duse din vârful unei piramide regulate în fețele laterale se numesc **apoteme ale piramidei**.

Denumirea unei piramide este dată de poligonul de la bază.

Desenăm			
Denumim	Piramidă triunghiulară	Piramidă patrulateră	Piramidă hexagonală
Citim	Piramida $VABC$	Piramida $VABCD$	Piramida $VABCDEF$

●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

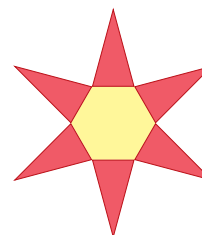
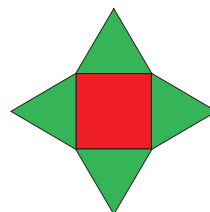
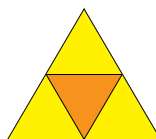
Intrarea în muzeul Luvru are forma de piramidă patrulateră regulată. Aceasta are 4 fețe congruente, deci pe fiecare față sunt aproximativ 150 bucăți de sticlă în formă de romb și 17 bucăți de formă triunghiulară. Aproximarea provine din faptul că pe una dintre fețe este intrarea în muzeu, deci bucățile de sticlă nu sunt distribuite egal pe toate fețele.

●●●●▷ Construim și explorăm!



Imaginile alăturate conțin desfășurări ale unor piramide regulate. Folosește carton subțire și scotch pentru a construi fiecare desfășurată și apoi piramida respectivă.

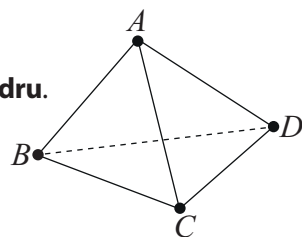
Ce reguli trebuie să aplici, pentru a obține piramide regulate?



→ 2. Ce este un tetraedru?



- Fie patru puncte necoplanare. Oricare trei dintre ele determină un plan. Cele patru plane astfel determinate delimitează un corp geometric numit **tetraedru**. Un tetraedru este o piramidă triunghiulară, doar că fiecare față poate fi considerată bază.
- Tetraedrul regulat** este tetraedrul cu toate muchiile congruente. Într-un tetraedru regulat, toate fețele sunt triunghiuri echilaterale congruente.



●●●●▷ Evaluăm nivelul de bază

Câte fețe are un tetraedru? Dar o piramidă hexagonală?

●●●●▷ Probleme propuse

- Adevărat sau fals?**
Orice piramidă triunghiulară regulată are muchia bazei congruentă cu muchia laterală.
- Alege răspunsul corect!**
Numărul de fețe ale unei piramide pentagonale este:
A) 6 B) 5 C) 4 D) 8
- a)** Precizează denumirea corpului reprezentat în fiecare desen.
b) Realizează desene asemănătoare, notează-le și precizează elementele caracteristice.
- a)** Cărui corp îi corespunde fiecare desfășurare?
- a)** Câte muchii are o piramidă cu 5 fețe?
b) Câte fețe are o piramidă cu 12 muchii?
c) Câte vârfuri are o piramidă cu 6 muchii?
- a)** Calculează lungimea drumului minim ce unește vârfurile A și C , pe fețele laterale ale piramidei.
b) Cât este lungimea apotemelor piramidei?
- Fie $ABCD$ un tetraedru și M, N, P, Q centrele de greutate ale fețelor ACB, ABD, ACD și BCD .
a) Demonstrează că dreptele AM și DQ determină un plan.
b) Justifică dacă M, N, P, Q pot fi vârfurile unui tetraedru.
c) Verifică dacă muchiile tetraedrelor $ABCD$ și $MNPQ$ sunt proporționale, apoi enunță un rezultat analog pentru geometria plană.
- Un cort în formă de tetraedru regulat, notat $SABC$, are muchia de 6 m și vârful în S . Cortul este prevăzut cu un fermoar ce unește punctul S cu M , mijlocul muchiei BC . O este centrul cercului circumscris triunghiului SBC . Care este lungimea drumului minim parcurs de o furnică pe suprafața cortului de la A la O , traversând muchia SC ? Ajunge furnica la fermoar?
- Fiecărui vârf al unei piramide îi atribuim unul din numerele 1; -1 sau 0, astfel încât suma numerelor atribuite vârfurilor oricărei fețe să fie 0. Demonstrează că, dacă nu apare doar 0, baza acestei piramide are un număr par de laturi.
- Un tetraedru are proprietatea că, în orice vârf, suma măsurilor unghiurilor cu originea în acel vârf, situate pe fețele tetraedrului, este 180° . Demonstrează că orice două muchii opuse ale acestui tetraedru sunt congruente.

Fișă pentru portofoliu. Folosește rigla și compasul pentru a desena desfășurări ale unor piramide patrulaterale diferite, dar care au baze congruente. Explică ce reguli ai respectat în realizarea acestor desene și include foile cu desene și explicații în portofoliul final.

O situație-problemă

Constructorii de poduri se bazează pe o caracteristică interesantă a dreptelor în spațiu. Observăm că direcția de deplasare a trenului și cea a camionului nu sunt paralele, dar nici nu se întâlnesc. Cum se numesc astfel de drepte?



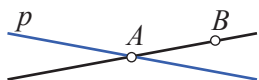
Vrem să știm! Ce poziții relative pot avea două drepte în spațiu?

1. Ce sunt dreptele necoplanare?

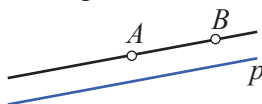
Ne amintim și extindem!

În plan, două drepte pot fi:

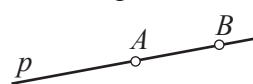
• **concurente:** $p \cap AB = \{A\}$



• **paralele:** $p \cap AB = \emptyset$



• **confundate:** $p = AB$



În spațiu, am văzut că există mai multe situații: de aceea, este nevoie să formulăm noi definiții.

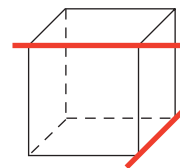
Definim	Două drepte coplanare, care nu au puncte comune, se numesc drepte paralele . Două drepte paralele determină un plan.	Unele drepte sunt necoplanare adică nu sunt incluse într-un același plan. Dreptele necoplanare nu pot avea puncte comune.
Exemplificăm	În cubul $ABCD A' B' C' D'$, dreptele AB și $A' B'$ sunt paralele.	În cubul $ABCD A' B' C' D'$, dreptele AA' și BC sunt necoplanare.
Justificăm	$AB, A' B' \subset (ABB' A')$; patrulaterul $ABB' A'$ este pătrat, deci laturile opuse sunt paralele.	Punctele necoliniare A, B, C determină un plan, dar $A' \notin (ABC)$. Deducem că AA' și BC sunt necoplanare.

Explică de ce două drepte necoplanare nu pot avea puncte comune.

Gândim critic și constructiv!

Rezolvăm situația-problemă

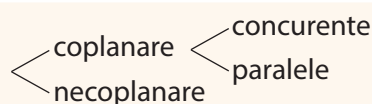
Direcția de deplasare a trenului și a camionului au poziții similare celor două drepte marcate pe cubul alăturat: acestea sunt drepte necoplanare. Ele nu au puncte comune, dar nici nu sunt drepte paralele!



Exprimare orală

Explică și exemplifică schema:

Două drepte distincte în spațiu pot fi:



Evaluăm nivelul de bază

$ABCD A' B' C' D'$ este un cub. Indică perechi de muchii necoplanare.

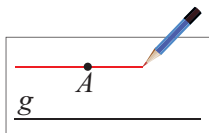
➔ 2. Ce proprietăți au dreptele paralele în spațiu?

●●●●▶ Să comparăm!

În plan

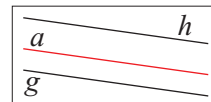
Axioma paralelelor Printr-un punct exterior unei drepte se poate construi o singură paralelă la acea dreaptă.

Date dreapta g și punctul A , cu $A \notin g$, putem construi o dreaptă ce trece prin A și este paralelă cu g .



Tranzitivitatea relației de paralelism:

Două drepte distincte, paralele cu a treia dreaptă, sunt paralele între ele.

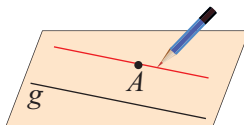


În spațiu

Dreapta și punctul exterior ei determină un plan.

În acest plan, putem aplica axioma paralelelor.

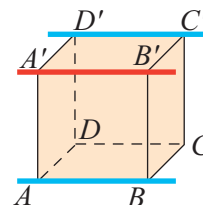
De aceea, **axioma paralelelor** rămâne valabilă și în spațiu.



Proprietatea de tranzitivitate

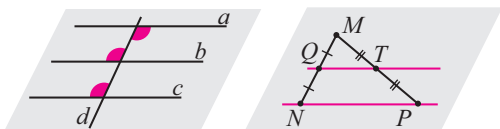
se păstrează în spațiu.

De exemplu, în cubul $ABCD A' B' C' D'$, $AB \parallel A' B'$ și $C' D' \parallel A' B'$, deci $AB \parallel C' D'$.



●●●●▶ Probleme propuse

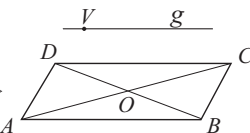
1. Utilizează convențiile de desen și teoremele studiate în clasele anterioare pentru a identifica perechile de drepte paralele din figurile de mai jos.



2. Pentru cubul *ALGEBRIC*, propune exemple de drepte coplanare cu AL , concurente cu AG , paralele cu IC , respectiv, necoplanare cu EL .

3. În cubul $ABCD A' B' C' D'$, demonstrează că $BDD' B'$ este un paralelogram, apoi că $BD \parallel B' D'$.

4. V este un punct exterior planului paralelogramului $ABCD$, cu $AC \cap BD = \{O\}$. Prin V trece o dreaptă g , astfel încât $g \parallel AB$.



- a) Ce poziție au dreptele AO și AC ?
b) Ce poziție au dreptele g și CD ?
c) Sunt dreptele g și AC necoplanare?

5. Decupează din carton trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$) și îndoaie-l după linia mijlocie MN . Demonstrează că AB și CD rămân paralele și după îndoire.

6. $VABCD$ este piramidă patrulateră regulată. Fie O centrul bazei și G simetricul lui V față de O . Demonstrează că:
a) $CG \parallel VA$; b) $BG \parallel VD$.

7. $ABCD$ este tetraedru regulat cu M, N, P, Q, R, S mijloacele muchiilor AB, AC, BC, BD, CD , respectiv AD . Demonstrează că:

- a) $MNRQ$ este paralelogram;
b) MR, NQ și PS sunt concurente.

8. $ABCD$ este tetraedru regulat cu $AB = 12$ cm. Fie E, F mijloacele muchiilor BC , respectiv BD și G, H centrele de greutate ale triunghiurilor ABC , și respectiv, ABD . Demonstrează că $EFHG$ este trapez isoscel. Determină perimetrul și aria acestuia.

9. $VABCDEF$ este piramidă hexagonală regulată cu M, N, P, Q mijloacele muchiilor VA, VB, VD și respectiv, VE . Demonstrează că:

- a) M, N, C, F sunt coplanare;
b) M, N, P, Q sunt coplanare;
c) MP și NQ sunt concurente.

10. Fie $ABCD$ un paralelogram și dreptele $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$, astfel încât A', B', C', D' sunt de aceeași parte a planului (ABC) . $AA' = 7$ cm, $BB' = 9$ cm, $CC' = 13$ cm, $DD' = 11$ cm. Demonstrează că punctele A', B', C', D' sunt coplanare.

O situație-problemă

În imaginea alăturată, terasamentul poate fi asociat cu o suprafață plană, iar șinele de cale ferată și stâlpii de electricitate cu niște drepte. Cum se pot descrie pozițiile acestor drepte față de planul orizontal?



Vrem să știm!

Cum putem descrie diferite poziții ale unei drepte față de un plan?

1. Ce poziții relative pot avea o dreaptă și un plan?

Definiții

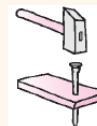
- O dreaptă este **secantă unui plan (concurentă cu un plan)** dacă dreapta are un singur punct comun cu acel plan.
- O dreaptă este **paralelă cu un plan** dacă dreapta și planul nu au puncte comune.
- O dreaptă este **inclusă într-un plan** dacă toate punctele ei aparțin planului.

Pentru a preciza poziția unei drepte față de un plan, folosim următoarele convenții:

Desenăm			
Notăm	$d \subset \alpha$	$d \cap \alpha = \{A\}$	$d \parallel \alpha$
Interpretăm	Dreapta d este inclusă în planul α .	Dreapta d este secantă planului α .	Dreapta d este paralelă cu planul α .

Exprimare orală

Uneori, în loc de „dreaptă secantă unui plan” spunem „dreaptă care înțeapă un plan”. Observă desenul alăturat și explică această denumire.



Amintește-ți axioma: Dacă două puncte distincte aparțin unui plan, atunci dreapta determinată de cele două puncte este inclusă în plan. Explică apoi de ce avem doar trei tipuri de poziții ale unei drepte față de un plan.

Gândim critic și constructiv!

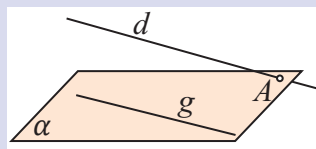
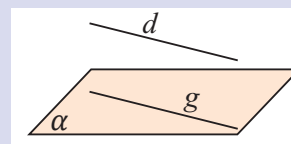
2. Cum arătăm că o dreaptă este paralelă cu un plan?

Teorema de paralelism a unei drepte cu un plan

Dacă o dreaptă neconținută într-un plan este paralelă cu o dreaptă conținută în acel plan, atunci dreapta este paralelă cu planul.

Ipoteză: $d \not\subset \alpha$; $d \parallel g$; $g \subset \alpha$

Concluzie: $d \parallel \alpha$



Demonstrație

Presupunem prin absurd că $d \not\parallel \alpha$; notăm $d \cap \alpha = \{A\}$. Deoarece $d \parallel g$, deducem că $A \notin g$. Atunci dreptele d și g sunt necoplanare, deoarece $\alpha = (g, A)$, iar $d \not\subset \alpha$. Această concluzie contrazice ipoteza: $d \parallel g$. Deducem că presupunerea făcută este falsă, adică $d \parallel \alpha$.

În cubul $ABCD A'B'C'D'$, avem $A'B' \parallel (ABC)$.

Pentru aceasta, transcrie demonstrația de mai jos și adaugă detaliile care lipsesc în locurile marcate cu ...

Demonstrație

Avem $A'B' \parallel AB$..., $A'B' \not\subset (ABC)$... și $AB \subset (ABC)$.

Rezultă, conform ..., $A'B' \parallel (ABC)$.

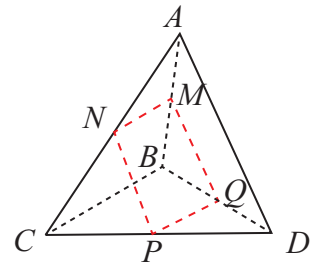
Gândim critic și constructiv!

Problemă rezolvată

$ABCD$ este un tetraedru oarecare. Fie M, N, P, Q mijloacele muchiilor AB, AC, CD , respectiv, BD .

Demonstrează că:

- punctele M, N, P, Q sunt coplanare;
- dreptele AD și BC sunt paralele cu planul (MNP) .

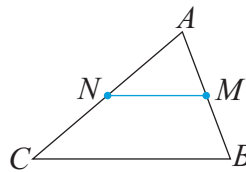


Cum redactăm?

a) În triunghiul ABC , MN este linie mijlocie, deci $MN \parallel BC$. Analog, din triunghiul DBC , obținem că $PQ \parallel BC$.

Deoarece $MN \parallel BC$ și $PQ \parallel BC$, iar dreptele MN și PQ sunt distincte, rezultă $MN \parallel PQ$.

Două drepte paralele sunt coplanare: există planul $\alpha = (MN; PQ)$. Deducem că punctele M, N, P, Q aparțin planului α , deci sunt coplanare.



Cum gândim?

Folosim tranzitivitatea relației de paralelism și definiția dreptelor paralele.

- b) $\left. \begin{array}{l} BC \parallel MN \\ MN \subset \alpha \\ BC \not\subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow BC \parallel \alpha$. Analog, $AD \parallel \alpha$, deoarece $AD \parallel NP$.

Aplicăm teorema de paralelism a unei drepte cu un plan.

Evaluăm nivelul de bază

- $ABCD A'B'C'D'$ este cub. Demonstrează că $BC \parallel (ADD')$.
- $ABCD$ este tetraedru. Fie E, F mijloacele muchiilor AB și, respectiv, AC . Arată că $EF \parallel (BCD)$.

Probleme propuse

- Alege răspunsul corect!
În cubul $ABCD A'B'C'D'$, o dreaptă secantă cu planul (BCC') este:
A) BB' **B) AD** **C) DB'** **D) DD'**
- Trapezul $ABCD$ are baza CD inclusă în planul α , iar punctul A este exterior planului. Ce poziție au dreptele CD, AC, BD, AB față de planul α ?
- În cubul $ALGEBRIC$, indică poziția dreptelor AE, AC, BC, CI, CR , respectiv, BI , față de planul (ALG) .
- În tetraedrul $SABC$, M, N și P sunt mijloacele muchiilor SA, SB și SC . Precizează ce poziție au dreptele MN, SN și BP față de planele (ACB) și (SCB) .

★★

5. $ABCD$ este un tetraedru iar E, F, G sunt mijloacele muchiilor AB, AD , respectiv, CD . Demonstrează că $EF \parallel (BCD)$ și $FG \parallel (ABC)$.

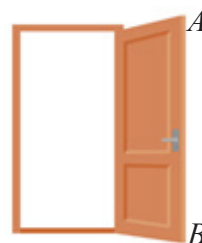
6. Pe cubul $ABCDEFGH$ stabilește:

- a) poziția dreptei AB față de planul (CFG) ;
- b) poziția dreptei BD față de planul (EFG) .

7. Pătratul $ABCD$ și triunghiul ABE au latura AB comună, dar sunt situate în plane diferite. Fie M și N mijloacele laturilor AE și BE și O centrul pătratului $ABCD$. Demonstrează că:

- a) $MN \parallel (ACD)$; b) fiecare dintre dreptele AB, CD, CE, DE este paralelă cu planul (MNO) .

8. Demonstrează că muchia exterioară AB a unei uși deschise este paralelă cu planul zidului pe care se află tocul ușii.



9. a) Dacă O și Q sunt centrele a două fețe opuse ale unui cub, stabilește poziția dreptei OQ față de fiecare dintre planele fețelor cubului.

b) Aceeași cerință, dacă O și Q sunt centrele a două fețe alăturate ale cubului.

★★★

10. $VABC$ este piramidă triunghiulară regulată. Construim $AD \perp VB, D \in VB$ și $AE \perp CV, E \in CV$. Demonstrează că $DE \parallel (ABC)$.

11. Fie S un punct exterior planului paralelogramului $ABCD$. Fie E, F , mijloacele segmentelor SA , respectiv SC . Demonstrează că: a) $BC \parallel (SAD)$; b) $CD \parallel (SAB)$; c) $EF \parallel (ABC)$; d) $SC \parallel (BED)$.

12. Fie $ABCD$ un tetraedru, iar E și F proiecțiile punctului A pe bisectoarele unghiurilor ABC și ABD . Demonstrează că $EF \parallel (BCD)$.

13. În piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu $VA = AB = 18$ cm, punctul T este situat pe muchia VB , astfel încât perimetrul triunghiului ACT să fie minim. Demonstrează că:

- a) $VD \parallel (ACT)$;
- b) dreptele VD și AT sunt necoplanare.

14. Care este numărul maxim de muchii ale unui tetraedru pe care le poate intersecta un plan ce nu trece prin niciun vârf al tetraedrului?

★★★★

15. Pe muchiile congruente AC și AD ale unui tetraedru $ABCD$ se iau punctele E și F , astfel încât $AE = DF$. Argumentează că $HO \parallel (BCD)$, unde H și O sunt mijloacele segmentelor AB , respectiv EF .

16. Fie E și F centrele de greutate ale fețelor ABC și ACD din tetraedru $ABCD$. Demonstrează că: a) $BD \parallel (CEF)$ și $BD \parallel (AEF)$; b) $EF \parallel (ABD)$.

17. În piramida patrulateră regulată $VABCD$, G este centrul de greutate al triunghiului VAD , iar P este un punct pe muchia BC , astfel ca $CP = 2BP$. Demonstrează că $BG \parallel (VDP)$.

18. Trapezele $ABCD$ și $ABEF$ au baza AB comună, dar sunt situate în plane diferite. Fie G și H punctele de intersecție ale diagonalelor acestor trapeze.

- a) Demonstrează că $GH \parallel (CEB)$ dacă și numai dacă $CD = EF$.
- b) Dacă M și N sunt mijloacele bazelor CD și EF , cercetează dacă GH și MN sunt coplanare.

19. În cubul $ABCDEFGH$, notăm cu O centrul feței $BCGF$. Demonstrează că $AO \parallel (DEG)$. Precizează apoi un plan, determinat de vârfuri ale cubului, paralel cu dreapta HO .



●●●●▷ Alege și rezolvă în 5 minute!

A

$VABCD$ este piramidă patrulateră regulată. Demonstrează că $CD \parallel (VAB)$.

B

$ABCD A'B'C'D'$ este cub. Demonstrează că $A'D' \parallel (ABC)$.

C

$VABCDEF$ este piramidă hexagonală regulată. Demonstrează că $CF \parallel (VAB)$.

O situație-problemă

De ce oare foarte multe case au acoperișul de forma celui din imaginea alăturată?

Vrem să știm!

Ce poziții ale planelor în spațiu sunt relevante geometric?



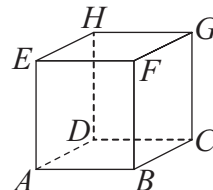
1. Ce poziții pot avea două plane în spațiu?

Axioma de determinare a planului ne spune că, dacă două plane au trei puncte necoliniare comune, atunci aceste plane coincid.

Axioma de intersecție a două plane

Dacă două plane distincte **au un punct comun**, atunci **intersecția lor este o dreaptă**.

De exemplu: În cubul $ABCDEFGH$, planele (ABC) și (BEH) sunt plane distincte, care conțin amândouă punctul B . Aceste plane au în comun dreapta BC .



Definiții

- Două plane a căror intersecție este o dreaptă se numesc **plane secante**.
- Două plane care nu au niciun punct comun se numesc **plane paralele**.

Să comparăm

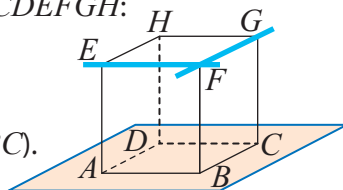
În plan		În spațiu	
Drepte identice: au cel puțin două puncte în comun		Plane identice: au cel puțin trei puncte necoliniare în comun	
Drepte concurente: au exact un punct în comun		Plane secante: sunt distincte și au cel puțin un punct în comun	
Drepte paralele: nu au puncte în comun		Plane paralele: nu au puncte în comun	

Observă că pozițiile relative a două drepte în plan, sau a două plane în spațiu sunt determinate de intersecțiile planelor.
Explică de ce nu pot apărea alte situații, în afara celor descrise în tabel.

Gândim critic și constructiv!

2. Cum identificăm plane paralele?

Enunțăm	Aplicăm	Demonstrăm
Teoremă: Dacă două drepte concurente a și b sunt paralele cu un plan α , atunci planul determinat de dreptele a și b este paralel cu α .	În cubul $ABCDEFGH$: $EF \parallel (ABC)$ $FG \parallel (ABC)$ Deci: $(EFG) \parallel (ABC)$.	Presupunem prin absurd că planele $(a; b)$ și α au dreapta d în comun. Atunci $d \subset \alpha$, deci $d \cap a \neq \emptyset$ sau $d \cap b \neq \emptyset$. Contrazicem ipoteza $\Rightarrow (a; b) \parallel \alpha$.



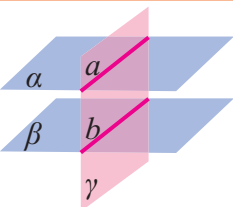
Desenează o figură sugestivă și completează demonstrația cu detaliile care lipsesc.

Gândim critic și constructiv!

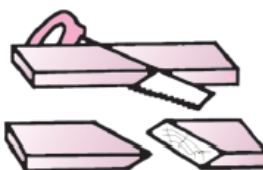
➔ 3. Ce relații sunt între drepte și plane paralele?

●●●● ▷ Enunțăm și demonstrăm

“Teorema fierăstrăului” Dacă două **plane paralele** sunt intersectate de un al treilea plan, atunci **dreptele de intersecție** sunt **paralele**.

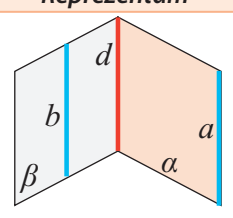
Reformulăm	Reprezentăm	Demonstrăm
Dacă două plane sunt paralele, atunci orice dreaptă din primul plan este paralelă cu orice altă dreaptă din al doilea plan, cu care este coplanară.		Ipoteza: $\alpha \parallel \beta, \alpha \cap \gamma = a, \gamma \cap \beta = b$. Dreptele a și b sunt coplanare. Dacă, prin absurd, $a \cap b = \{P\}$, atunci punctul P ar fi punct comun pentru planele α și β . Contradicție! Deducem concluzia: $a \parallel b$.

Transcrie demonstrația de mai sus și completează detaliile care lipsesc. Observă apoi imaginea și explică denumirea „teorema fierăstrăului”.



Gândim critic și constructiv!

“Teorema acoperișului” Dacă dreptele paralele a și b sunt conținute în planele secante α și respectiv β , atunci dreapta d de intersecție a celor două plane este paralelă cu dreptele date.

Reformulăm	Reprezentăm	Demonstrăm
Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, atunci este paralelă cu orice altă dreaptă din acel plan, cu care este coplanară.		Ipoteza: $a \parallel b, a \subset \alpha, b \subset \beta, \alpha \cap \beta = d$. Dreapta a este paralelă cu planul β . Dreptele a și d sunt coplanare. Dacă, prin absurd, $a \cap d = \{P\}$, atunci punctul P ar fi punct comun pentru dreapta a și planul β . Contradicție! Deducem concluzia: $a \parallel d$ și $b \parallel d$.



Transcrie demonstrația de mai sus și completează detaliile care lipsesc. Observă apoi imaginea și explică denumirea „teorema acoperișului”.



Gândim critic și constructiv!

●●●● ▷ Rezolvăm situația-problemă

De regulă, acoperișurile caselor seamănă cu două plane secante: coama acoperișului sugerează dreapta comună a celor două plane. Teorema acoperișului ne spune că, dacă streșinile caselor sunt orizontale, atunci și coama acoperișului trebuie să fie orizontală.

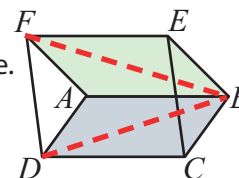
●●●● ▷ Problemă rezolvată

Paralelogramele $ABCD$ și $ABEF$ au latura AB comună, dar sunt situate în plane diferite.

- Justifică dacă planele (ADF) și (BCE) sunt paralele.
- Demonstrează că planele (BDF) și (BCE) sunt secante și descrie dreapta lor de intersecție.

Rezolvare:

- Deoarece $AD \parallel BC$ și $AF \parallel BE$, deducem că dreptele AD și AF sunt paralele cu planul (BCE) .
Aplicăm teorema despre plane paralele și deducem că $(AD; AF) \parallel (BCE)$. Altfel spus: $(ADF) \parallel (BCE)$.
- Planele (BDF) și (BCE) sunt distincte și au punctul B în comun, deci sunt plane secante. Deoarece $DF \parallel CE, DF \subset (DFB), CE \subset (BEC)$, dreapta de intersecție a celor două plane este paralela prin B la EC .



●●●●▷ **Evaluăm nivelul de bază**

În cubul $ABCDEFGH$, determină dreapta de intersecție a planelor (ABH) și (CDH) .

●●●●▷ **Probleme propuse**

★

1. Adevărat sau fals?

Dacă două drepte dintr-un plan sunt paralele cu un alt plan, atunci planele sunt paralele.

2. Imaginea prezintă o cazma înfiptă în pământ. Este oare adevărat că planul cazmalei și planul solului au numai un segment în comun? Justifică răspunsul!



3. În cubul $ABCDEFGH$, determină două drepte concurente din planul (ABE) , care sunt paralele cu planul (DGH) . Enunță apoi teorema cu care poți argumenta că $(ABF) \parallel (DGH)$.

4. $ABCD A'B'C'D'$ este un cub. Determină pozițiile relative ale planelor: (ABC) și $(B'C'D')$; $(AA'D)$ și $(CB'C')$; $(A'AC)$ și $(B'BC)$.

★★

5. $VABC$ este piramidă triunghiulară. Pe muchiile VA, VB, CV se consideră punctele D, E , respectiv F , astfel încât $(DEF) \parallel (ABC)$. Demonstrează că $\Delta VDE \sim \Delta VAB$ și $\Delta VDF \sim \Delta VAC$.

6. Dacă $ABCD$ este un tetraedru, iar M, N și P sunt mijloacele muchiilor AB, AC și AD , stabilește poziția planului (MNP) față de planul (BCD) .

7. Paralelogramele $ABCD$ și $CDEF$ sunt situate în plane diferite. Fie M, N, P mijloacele segmentelor BD, DF , respectiv CD . Arată că:
a) (BCM) și (ADM) coincid; **b)** (BDF) și (DMN) sunt plane identice; **c)** (BDF) și (BCE) sunt plane secante; **d)** (BDF) și (ACE) sunt plane secante; **e)** (BCF) și (ADE) sunt plane paralele; **f)** (BCF) și (MPN) sunt plane paralele.

★★★

8. $EFGH$ este tetraedru cu A, B, D puncte interioare muchiilor EF, EG , respectiv EH , astfel încât $AB \cap FG = \{C\}$, $AD \cap FH = \{O\}$, $BD \cap GH = \{L\}$. Demonstrează că punctele C, O, L, E sunt coplanare.

9. Dreptunghiul $ABCD$ și pătratul $ADEF$ sunt situate în plane diferite, iar $AD = 6$ cm și $AB = 9$ cm.

a) Demonstrează că planele (AEC) și (BFD) sunt plane secante și determină dreapta lor de intersecție.

b) Calculează AG , știind că $G \in AD$, astfel încât suma $EG + BG$ să fie minimă.

10. Stabilește care dintre afirmațiile următoare este adevărată, pentru dreptele a și b și pentru planele α și β .

a) Dacă $a \parallel b$ și $b \parallel \alpha$, atunci $a \parallel \alpha$.

b) Dacă $a \parallel \alpha$ și $\alpha \parallel \beta$, atunci $a \parallel \beta$.



11. Fie $ABCD$ tetraedru. Un plan α , paralel cu dreptele AC și BD , intersectează segmentele AB, BC, CD , respectiv DA , în E, F, G, H . Arată că: **a)** segmentele EG și FH au același mijloc. **b)** dacă $AC \geq BD$, avem și $BD \leq EF + EH \leq AC$.

★★★★

12. Piramida $VOLUM$ are bază trapezul $LUMO$ ($LU \parallel MO$). Determină dreapta de intersecție a planelor:

a) (VOL) și (VUM) ; **b)** (VOM) și (VLU) .

13. Pe muchiile laterale ale piramidei patrulater regulate $VABCD$ se aleg punctele M, N, P, Q , care sunt vârfurile unui paralelogram. Demonstrează că $MNPQ$ este chiar pătrat.

●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A

Numește o pereche de plane paralele și o pereche de plane secante în cubul $ABCDEFGH$.

B

Fie N, P, Q mijloacele muchiilor AC, BC și CD din tetraedrul $ABCD$. Arată că: $(NPQ) \parallel (ABD)$.

C

Triunghiul ABC și trunghiul DEF sunt situate în plane diferite, astfel încât $AB \parallel DE$ și $BC \parallel EF$. Arată că $(ABC) \parallel (DEF)$.



O situație-problemă

Panoul luminos care indică ieșirea din sala de spectacol are dimensiunile de 8 dm, 4 dm și 15 dm. În interiorul panoului sunt mai multe becuri alimentate de un cablu electric de lungime minimă. El se alimentează de la o sursă aflată într-un vârf și înfășoară panoul prin spate, traversând două muchii până ajunge în vârful opus. Care este lungimea minim posibilă a cablului? Pentru a răspunde, ar trebui să înțelegem cum traversează cablul fețele panoului.



Vrem să știm! >>> Ce este și cum se desfășoară în plan un corp geometric cu două fețe paralele?

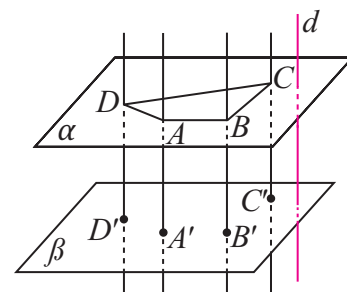
1. Ce este o prismă?

Fie planele paralele α și β , dreapta d secantă acestor plane și patrulaterul $ABCD$ din planul α . Toate acestea determină un corp geometric astfel:

Paralelele la d duse prin A, B, C și D intersectează β în A', B', C' și D' .

Planele α și β și fețele delimitate de paralelogramele $ABB'A', BCC'B', CDD'C'$ și $DAA'D'$ mărginesc un corp geometric.

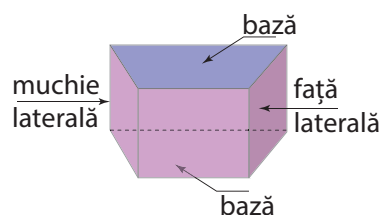
Putem repeta construcția anterioară înlocuind patrulaterul $ABCD$ cu un poligon oarecare P din planul α . Obținem astfel un corp geometric denumit **prismă**.



Definiții

O prismă are două **baze**, situate în plane paralele.

- **Fețele laterale** ale prisme sunt delimitate de paralelograme.
- **Muchiile laterale** ale prisme sunt congruente, iar dreptele determinate de ele sunt paralele.
- O prismă se numește **prismă dreaptă**, dacă fețele sale laterale sunt dreptunghiuri. O prismă dreaptă se numește **prismă regulată**, dacă bazele prisme sunt **poligoane regulate**.



Denumirea unei prisme este dată de poligonul de la bază.

Desenăm și notăm			
Denumim	Prismă triunghiulară	Prismă patrulateră	Prismă hexagonală
Citim	Prisma $ABCDEF$	Prisma $ALGEBRIC$	Prisma $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$

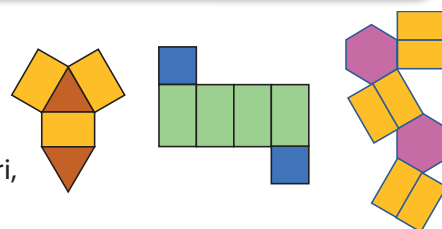
Recitește modul în care definim o prismă și argumentează de ce fețele laterale ale acesteia sunt paralelograme.

Gândim critic și constructiv!

Construim și explorăm!



Imaginile alăturate conțin desfășurări ale unor prisme regulate. Folosește carton subțire și scotch pentru a construi fiecare desfășurare și prisma respectivă. Inventează apoi și alte desfășurări, din care poți obține prisme regulate.



➔ 2. Cum definim paralelipipedul dreptunghic și cubul?

●●●● ▶ Să observăm!

O prismă este determinată de două plane paralele α și β , o dreaptă d secantă la acestea și un poligon P situat într-unul din cele două plane. Dacă poligonul P este un paralelogram, atunci toate fețele prisme (adică atât fețele laterale, cât și bazele) sunt paralelograme. O astfel de prismă se numește **paralelipiped**. Într-un paralelipiped, oricare două fețe opuse pot fi considerate baze.

Cu ce corp geometric se aseamănă paralelipipedul, din punct de vedere al proprietății de mai sus?

Gândim critic și constructiv!

Unele paralelipipede au proprietăți și denumiri specifice.

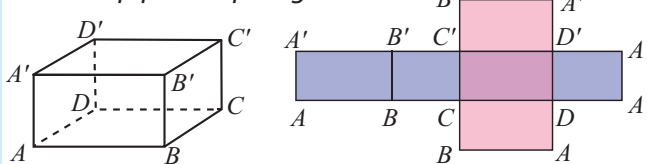
Definiție

Paralelipipedul dreptunghic este o prismă cu bazele dreptunghiuri congruente și fețele laterale dreptunghiuri.

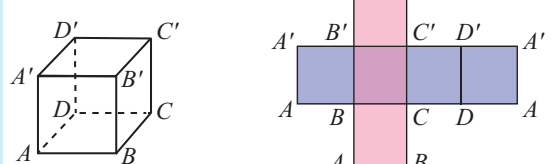
Cubul este paralelipipedul dreptunghic cu toate muchiile congruente.

Observație: Într-un cub, toate cele șase fețe sunt pătrate congruente.

Paralelipiped dreptunghic

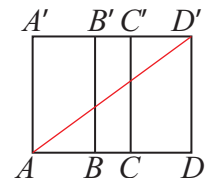


Cub



●●●● ▶ Rezolvăm situația-problemă

Desfășurăm pe un plan fețele laterale $ABB'A'$, $BCC'B'$ și $CDD'C'$ și obținem dreptunghiul $ADD'A'$. Cubul are lungimea minimă dacă, pe desfășurare, acesta coincide cu diagonala dreptunghiului. Avem $AD = (8 + 4 + 8) \text{ dm} = 20 \text{ dm}$. $\triangle D'DA$ este dreptunghic în $D \Rightarrow D'A^2 = AD^2 + D'D^2$. Obținem $D'A = 25 \text{ dm}$.



●●●● ▶ Problemă rezolvată

$ABCD A'B'C'D'$ este cub cu suma lungimilor muchiilor egală cu 72 cm.

- a)** Determină aria bazei și măsura unghiului CAB . **b)** Calculează lungimea drumului minim parcurs de o furnică de la B la A' , care traversează muchiile laterale CC' și DD' .

Rezolvare:

- a)** $ABCD A'B'C'D'$ este cub, deci toate muchiile sunt congruente. Deducem: că $AB = 72 \text{ cm} : 12 = 6 \text{ cm}$.

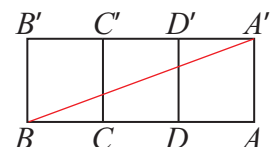
Calculăm: $A_{ABCD} = l^2 = (6 \text{ cm})^2 = 36 \text{ cm}^2$.

În pătratul $ABCD$ diagonala AC este bisectoarea unghiului drept BAD , deci $\sphericalangle CAB$ are măsura egală cu 45° .

- b)** Drumul minim pe suprafața cubului este drumul în linie dreaptă pe desfășurarea pe un plan a celor trei fețe laterale: $BCC'B'$, $CDD'C'$ și $DAA'D'$.

$\triangle BAA'$ este dreptunghic în A cu $BA = 6 \text{ cm} \cdot 3 = 18 \text{ cm} \Rightarrow$

$\Rightarrow A'B^2 = AB^2 + A'A^2 = (18 \text{ cm})^2 + (6 \text{ cm})^2 = 360 \text{ cm}^2 \Rightarrow BA' = 6\sqrt{10} \text{ cm}$.



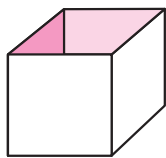
●●●● ▶ Evaluăm nivelul de bază

$ABCD A'B'C'D'$ este cub cu $AB = 8 \text{ cm}$. Arată că B, B', D', D sunt coplanare și calculează perimetrul patrulaterului $BB'D'D$.

●●●●▷ **Probleme propuse**

★ **1. Alege răspunsul corect!**

Cutia din imagine are forma unui cub. Care dintre următoarele ar putea fi capacul cutiei?



A)



B)



C)



D)



★ **2. Adevărat sau fals?**

Cubul este o prismă patrulateră regulată.

★ **3. a) Câte muchii are o prismă cu 6 fețe?**

b) Câte fețe are o prismă cu 18 muchii?

c) Câte vârfuri are o prismă cu 9 muchii?

★ **4. Desenează și notează o prismă hexagonală.**

Identifică două piramide patrulatere, determinate de vârfuri ale acestei prisme.

★★

5. $ABCD A'B'C'D'$ este un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 6$ cm, $BC = 12$ cm și $AA' = 6\sqrt{3}$ cm. Arată că $BCD'A'$ este romb.

6. Demonstrează că diagonalele AG, BH, CE, DF ale paralelipipedului $ABCDEFGH$ sunt patru drepte concurente. Ce proprietate mai are punctul lor de intersecție?

★ **7. Fie $ABCDEFGH$ un cub.**

a) Demonstrează că A, C, F, H sunt vârfurile unui tetraedru regulat.

b) Identifică un alt tetraedru regulat, care are vârfurile în vârfuri ale cubului.

c) Demonstrează că piramida $ABDE$ este piramidă triunghiulară regulată.

★★★

8. Fie $ABCDEFGH$ un paralelipiped dreptunghic și O centrul dreptunghiului $ABCD$.

a) Determină intersecția planelor (AHF) și (DBH) .

b) Găsește poziția punctului M , în care dreapta DH intersectează planul (ACF) .

c) Demonstrează că D este mijlocul segmentului HM .

d) Determină punctele N și P , astfel încât $\{N\} = HG \cap (ACF)$ și $\{P\} = HE \cap (ACF)$.

e) Adevărat sau fals?

Triunghiurile ACF și MNP au același centru de greutate.

9. Investigație. a) Desenează trei prisme și două piramide. Pentru corpurile geometrice desenate de tine, completează tabelul:

	①	②	③	④	⑤
Nr. fețe (f)					
Nr. muchii (m)					
Nr. vârfuri (v)					

b) Folosește datele din tabel și calculează, în fiecare caz: $f + m + v$; $f - m + v$; $f + m - v$.

Ce observi? Formulează o proprietate generală, apoi verifică afirmația pentru un alt corp geometric.

★★★★

10. În cubul $ABCDEFGH$, demonstrează că mijloacele muchiilor AB, BC, CG, GH, HE, EA sunt șase puncte coplanare, care determină un hexagon regulat.

11. Demonstrează că, dacă în paralelipipedul $ALGEBRIC$ toate cele 12 diagonale ale fețelor sunt congruente între ele, atunci acest paralelipiped este un cub.

●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A

Suma lungimilor muchiilor unui cub este egală cu 24 dm. Calculează lungimea muchiei cubului.

B

Dacă $ABCA'B'C'$ este o prismă, stabilește poziția dreptei $A'B'$ față de planul ABC și justifică răspunsul dat.

C

O prismă are fețele laterale reprezentate de șase pătrate cu latura de 5 cm. Calculează suma lungimilor tuturor muchiilor prisme.

► O situație-problemă

Aproape de centrul orașului Teotihuacán din Mexic se află o construcție din vremea aztecilor, ce pare neterminată. Construcția are forma unei piramide, al cărei vârf a fost "retezat" și înlocuit cu o platformă orizontală, de formă pătrată. Geo a citit despre talentul în arhitectură al aztecilor și se întreabă ce formă ar putea avea fundația acestei construcții uriașe.



Vrem să știm! ► Ce corpuri geometrice se obțin prin secțiuni paralele cu baza în piramidă sau în prismă?

➔ 1. Ce înseamnă „secțiune”?

► Să observăm

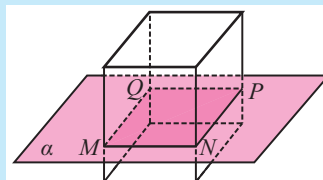
Prin tăierea unui măr, obținem bucăți delimitate de o suprafață plană. În mod analog, putem „tăia” diferite corpuri geometrice cu un plan.



Definiție

Figura geometrică obținută prin intersecția unui corp geometric cu un plan se numește **secțiune**.

Exemplu: Secțiunea obținută prin intersecția cubului alăturat cu planul α este patrulaterul $MNPQ$.



► Să comparăm

În plan	În spațiu
Prin secționarea unui paralelogram de-a lungul unei drepte paralele cu o latură a sa obținem două paralelograme. Secțiunea obținută este un segment congruent cu latura respectivă a paralelogramului dat.	Prin secționarea unei prisme triunghiulare cu un plan paralel cu bazele obținem două prisme. Secțiunea obținută este un triunghi congruent cu triunghiurile ce reprezintă bazele prisme.

Justifică proprietatea de mai sus, folosind teoreme despre plane paralele. Ce poți spune despre secțiunea obținută prin intersectarea unei prisme hexagonale regulate cu un plan paralel cu bazele prisme?

Gândim critic și constructiv!

► Evaluăm nivelul de bază

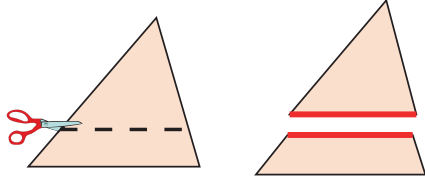
$ABCD A' B' C' D'$ este cub cu $D'A' = 12$ dm. Se secționează cu un plan paralel cu o față. Calculează perimetrul și aria secțiunii.

➔ 2. Ce este un trunchi de piramidă?

●●●● ▶ Comparăm și definim!

În plan

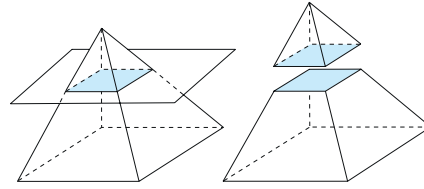
Prin secționarea unui triunghi cu o dreaptă paralelă cu una dintre laturile triunghiului obținem două figuri geometrice.



Una dintre figuri este un triunghi asemenea cu cel dat, iar cealaltă figură este un trapez.

În spațiu

Prin secționarea unei piramide cu un plan paralel cu baza acesteia, se obțin două corpuri geometrice.



Unul dintre acestea este o piramidă, iar celălalt este un corp geometric mărginit de fețele laterale ale piramidei date și de două plane paralele.

Definiție

Trunchiul de piramidă este corpul geometric obținut prin secționarea unei piramide cu un plan paralel cu baza și înlăturarea piramidei mici obținute. Un trunchi de piramidă are două **baze** situate în plane paralele.

Un **trunchi de piramidă regulată** se obține prin secționarea unei piramide regulate cu un plan paralel cu baza piramidei. Fețele laterale ale unui trunchi de piramidă regulată sunt trapeze isoscele congruente, iar înălțimile acestora se numesc **apoteme** ale trunchiului de piramidă.

Teoremă Bazele unui trunchi de piramidă triunghiulară sunt triunghiuri asemenea.

Demonstrație:

Fie $ABCA_1B_1C_1$ un trunchi de piramidă triunghiulară și fie $VABC$ piramida din care provine trunchiul.

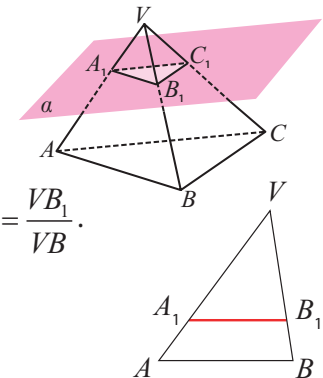
Deoarece $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$, obținem $AB \parallel A_1B_1$, $AC \parallel A_1C_1$, $BC \parallel B_1C_1$.

Aplicând teorema fundamentală a asemănării în $\triangle VAB$, deducem: $\frac{VA_1}{VA} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{VB_1}{VB}$.

Analog: $\frac{VB_1}{VB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1V}{CV}$ și $\frac{VA_1}{VA} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{C_1V}{CV}$.

Observând cele trei șiruri de rapoarte egale, rezultă că: $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$.

Folosim criteriul de asemănare L.L.L. și obținem concluzia: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.



●●●● ▶ Rezolvăm situația-problemă

Construcția despre care a citit Geo are forma unui trunchi de piramidă regulată. Deoarece baza mică a acestui trunchi de piramidă este de formă pătrată, deducem că și baza mare este un pătrat.

●●●● ▶ Evaluăm nivelul de bază

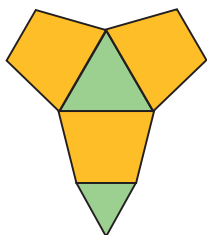
$ABCD$ este tetraedru regulat cu $AB = 9$ dm. Fie $E \in AB$, astfel încât $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$. Prin E se construiește un plan paralel cu planul BCD . Calculează perimetrul și aria secțiunii.



1. **Adevărat sau fals?**
Secționând un cub cu un plan paralel cu una din fețele cubului, se obține în secțiune un triunghi.
2. Desenează trunchiul de piramidă regulată $ABCDEF$. Reprezintă pe desen o apotemă a trunchiului.



5. Imaginea alăturată conține desfășurata unui trunchi de piramidă regulată.
Folosește carton subțire și scotch pentru a construi trunchiul de piramidă.
Propune apoi desfășurate pentru trunchiuri de piramidă patrulateră și hexagonală regulate și construiește piramidele respective.
6. $ABCD A'B'C'D'$ este trunchi de piramidă patrulateră regulată cu $AB = 18$ cm, $A'B' = 6$ cm și $VA = 18$ cm, unde VA este muchia laterală a piramidei din care provine trunchiul. Calculează AA' .



3. Cubul $ABCD A'B'C'D'$, cu $D'A = 20$ cm, se secționează cu un plan paralel cu baza. Calculează perimetrul și aria secțiunii.
4. Fie $ABCD A'B'C'D'$ paralelipiped dreptunghic cu $AB = 12$ cm și $AC = 13$ cm. Se secționează cu un plan paralel cu baza $ABCD$. Calculează perimetrul și aria secțiunii.



10. În trunchiul de piramidă $ABCA'B'C'$, se știe că toate muchiile laterale sunt congruente între ele și că triunghiul ABC este echilateral. Demonstrează că:
a) triunghiul $A'B'C'$ este tot echilateral;
b) $ABCA'B'C'$ este trunchi de piramidă regulată.

7. $ABCA'B'C'$ este trunchi de piramidă triunghiulară regulată cu $AB = 6$ cm, $A'B' = 2$ cm și $AA' = 8$ cm. Ce lungime are muchia laterală a piramidei din care provine trunchiul?
8. $ABCD A'B'C'D'$ este trunchi de piramidă patrulateră regulată cu $BD = 12\sqrt{2}$ cm și aria patrulaterului $A'B'C'D'$ egală cu 16 cm². Muchia laterală a piramidei din care provine trunchiul are 12 cm. Ce lungime are muchia laterală a trunchiului?
9. $ABCA'B'C'$ este un trunchi de piramidă triunghiulară regulată cu $AB = 20$ cm, $A'B' = 2$ cm și $AA' = 27$ cm. Calculează aria feței laterale $ABB'A'$.



12. Fie $ABCDEF$ un trunchi de piramidă triunghiulară regulată. Notăm cu G și H proiecțiile punctelor D și E pe muchiile AC , respectiv, BC . Arată că lungimea segmentului GH este media aritmetică a lungimilor segmentelor AB și DE .



11. Piramida patrulateră regulată $SABCD$ are toate muchiile cu lungimea de 12 cm. Fie G centrul de greutate al triunghiului SAB . Un plan paralel cu baza piramidei, ce trece prin punctul G , determină trunchiul de piramidă $ABCD A_1B_1C_1D_1$. Calculează perimetrul bazei mici și lungimea apotemei trunchiului.

13. Notăm cu S_B și S_b ariile bazelor unui trunchi de piramidă triunghiulară și cu S_m aria secțiunii determinată în acest trunchi de piramidă de planul ce conține mijloacele tuturor muchiilor laterale. Demonstrează că $\sqrt{S_B} + \sqrt{S_b} = 2\sqrt{S_m}$.

Fișă pentru portofoliu. Imaginează și desenează desfășurări ale unei piramide patrulatere regulate și ale unui trunchi de piramidă patrulateră regulată, astfel încât cele două corpuri obținute din aceste figuri să formeze, împreună, o piramidă patrulateră. Descrie apoi pas cu pas cum ai gândit realizarea acestor desene și de ce crezi că sunt corecte.

●●●●▷ **Recapitulăm prin probleme**

1. O noptieră de forma unui paralelipiped dreptunghic este așezată pe podea. Demonstrează că suprafața superioară a noptierei este orizontală, adică paralelă cu planul podelei.



2. *Adevărat sau fals?* Dacă secționăm un trunchi de piramidă regulată cu un plan paralel cu una din baze, obținem două trunchiuri de piramidă regulată.

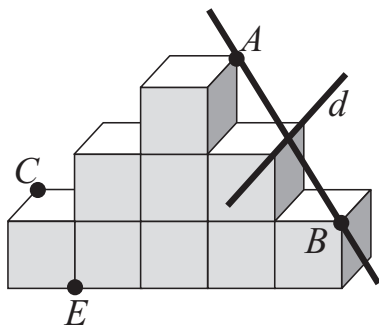
5. Demonstrează că într-un cub, dreapta ce unește centrele a două fețe alăturate este paralelă cu o altă față a cubului.
6. O piramidă triunghiulară regulată are muchia bazei de 4 cm și muchia laterală de 6 cm. Desenează o desfășurare a piramidei, care să aibă perimetrul cât mai mic posibil.

3. Pe imaginea alăturată, ce prezintă o cutie paralelipipedică de carton, am evidențiat dreapta d – determinată de marginea uneia dintre clapele dreptunghiulare ale cutiei. Demonstrează că d este paralelă cu planul bazei cutiei.
4. În piramida patrulateră regulată $SABCD$, determină dreapta de intersecție a planelor (SAC) și (SBD) .

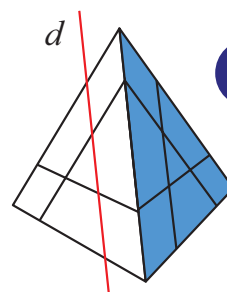


7. În cubul $ABCDEFGH$, fie M, N, P mijloacele celor trei muchii cu un capăt în A . Demonstrează că planul (MNP) este paralel cu planul (HFC) .
8. *Alege răspunsul corect!*
Numărul prismelor cu toate vârfurile în vârfurile unui cub este:
A) 2 B) 6 C) 7 D) 8

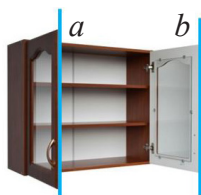
9. În figura de mai jos este prezentată o stivă formată din cutii cubice.
- a) Demonstrează că dreapta d (determinată de una dintre muchiile cutiilor) și dreapta AB (determinată de două vârfuri ale cuburilor) sunt concurente.
- b) Observă figura, apoi demonstrează că planul determinat de dreapta d și punctul E este paralel cu dreapta AC .



10. Imaginea prezintă un joc de tipul cubului Rubik, cu formă de tetraedru. Pe fiecare față a jocului, se pot vedea un triunghi echilateral, trei paralelograme și trei trapeze (toate fără suprapuneri). Demonstrează că dreapta d marcată pe imagine, determinată de una dintre laturile triunghiului, este paralelă cu o față a tetraedrului.
11. În tetraedrul $ABCD$, notăm A_1, B_1, C_1, D_1 centrele de greutate ale fețelor opuse vârfurilor A, B, C, D . Demonstrează că dreptele AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 sunt concurente.

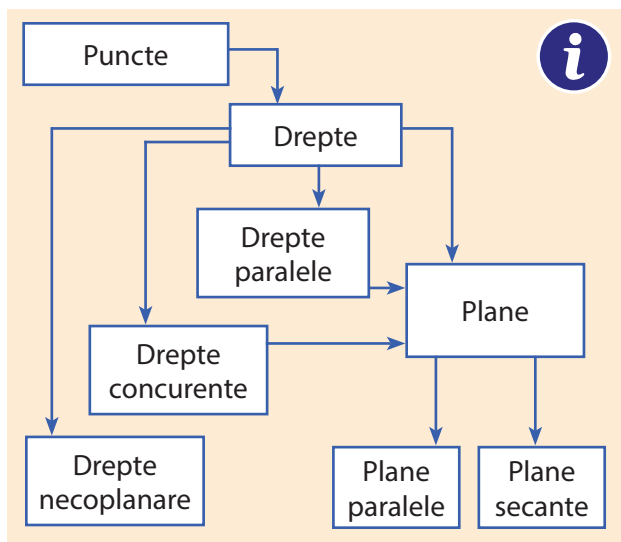


12. În imaginea alăturată apare un dulap, ale cărui uși dreptunghiulare sunt deschise. Demonstrează că, în orice poziție s-ar afla ușile dulapului, dreptele a și b , determinate de muchiile ușilor și marcate prin culoare pe figură, sunt coplanare.



13. Fie D, E, F centrele de greutate ale fețelor laterale ale piramidei triunghiulare $ROMB$.
- a) Demonstrează că planele (DEF) și (OMB) sunt paralele.
- b) Planul (DEF) intersectează muchiile laterale ale piramidei în punctele P, Q, S . Arată că triunghiurile PQS și OMB sunt asemenea și calculează raportul de asemănare.

Ce am învățat?



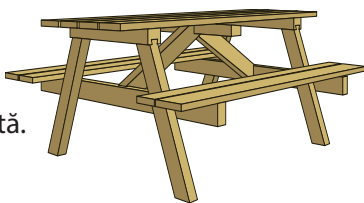
●●●● ▷ Rezolv testele pentru a verifica dacă pot:

- să identific, în configurații spațiale simple și în realitate, pozițiile relative ale unei drepte față de un plan sau pozițiile relative a două plane;
- să verific validitatea unor afirmații legate de pozițiile relative ale dreptelor și/sau ale planelor prin exemple și contraexemple;
- să utilizez axiome sau teoreme de geometrie pentru rezolvarea de probleme în configurații spațiale simple;
- să interpretez situații din realitatea înconjurătoare și să le transpun în probleme de geometrie în spațiu;
- să argumentez demersul de rezolvare a unei probleme de geometrie în spațiu.

Utilizează schema de mai sus și adaugă în portofoliu elementele esențiale din lecții, referitoare la aceste concepte.

●●●● ▷ Testul 1

1. În tetraedrul $ABCD$, fie M, N, P mijloacele muchiilor AB, AC , respectiv AD . Ce poziție are dreapta MN față de planul (BCP) ?
2. *Adevărat sau fals?* Două drepte paralele cu un același plan sunt paralele între ele. Justifică răspunsul.
3. În cubul $ABCDEFGH$, fie P și Q centrele fețelor ce au muchia DH comună. Demonstrează că dreapta PQ este conținută în planul (ACH) .
4. Pentru a fixa băncile pe o masă de grădină, au fost adăugate suporturi de lemn, ce unesc mijloacele a câte două picioare ale mesei, ca în imaginea alăturată. Demonstrează că băncile ce se sprijină pe aceste suporturi sunt situate într-un plan orizontal.
5. În tetraedrul $ABCD$, în care $AB = AC$, fie I și J centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABD și ACD . Arată că $IJ \parallel (BCD)$ dacă și numai dacă $BD = CD$.



●●●● ▷ Testul 2

1. În tetraedrul $ABCD$, fie M și N mijloacele muchiilor BC , respectiv AD . Ce poziție au planele (AMD) și (BNC) ?
2. *Adevărat sau fals?* Două plane paralele cu aceeași dreaptă sunt paralele între ele. Justifică răspunsul.
3. În cubul $ABCDEFGH$, demonstrează că dreapta AC este paralelă cu planul (BEG) .
4. Pentru consolidarea unui taburet de lemn, au fost fixate stinghii ce unesc două câte două mijloacele picioarelor taburetului, ca în imaginea alăturată. Demonstrează că aceste patru stinghii determină un plan orizontal.
5. În tetraedrul $ABCD$, toate fețele sunt triunghiuri ascuțitunghice, iar $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ABD$. Fie I și J ortocentrele triunghiurilor ABC și ABD . Arată că $IJ \parallel (BCD)$ dacă și numai dacă $BC = BD$.





Proiect: *Paralelism și perpendicularitate*

Plan de lucru

- ➔ **Scop:** Veți realiza un portofoliu online cu fișe referitoare la proprietățile geometrice studiate, conținând imagini și comentarii.
- ➔ **Materiale necesare:** Imagini selectate din diverse surse.

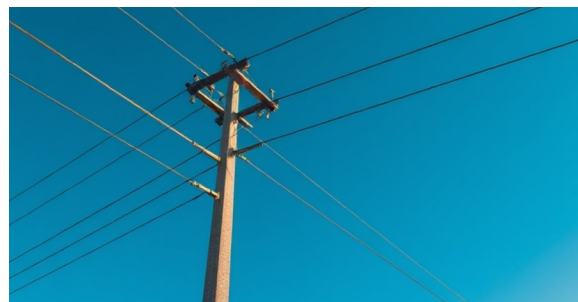
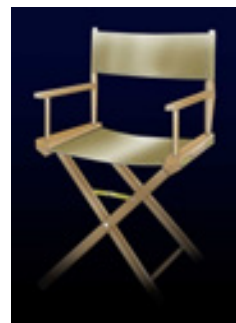
Realizarea proiectului

Lucrați în echipe de trei, patru sau cinci colegi.

- ➔ Identificați imagini sau desene care ilustrează relații între perpendicularitate și paralelism.
- ➔ Atașați o fișă cu probleme propuse și probleme rezolvate în legătură cu configurațiile sugerate de imaginile selectate.

Pentru început:

- ➔ Transpuneți prin desen câteva dintre imaginile alăturate. Descrieți imaginile în cuvinte sau cu ajutorul unor notații geometrice. Analizați configurațiile desenate în termeni de paralelism, perpendicularitate și relațiile dintre ele.
- ➔ Formulați probleme legate de aceste configurații și includeți-le în portofoliul vostru.



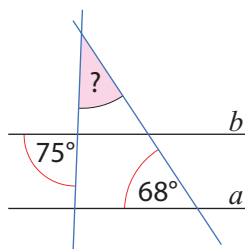
Interacționați în echipa voastră, realizați portofoliul în format electronic, apoi **prezentați** în clasă rezultatele proiectului.

Autoevaluare

✓ Rezolvă problemele și alege răspunsurile corecte, pentru a verifica ce știi la început de unitate de învățare.

1. Dreptele a și b din imagine sunt paralele. Măsura unghiului marcat pe figură este:

A) 37° B) 75°
C) 68° D) 30°



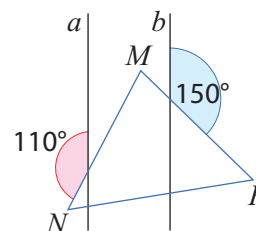
2. În triunghiul echilateral

ABC , măsura unghiului format de înălțimea din A cu înălțimea din B este:

A) 90° B) 60° C) 120° D) 45° .

3. În figura alăturată, $a \parallel b$, iar $MN \equiv MP$. Conform datelor de pe figură, măsura unghiului MPN este de:

A) 70° B) 30°
C) 40° D) 45°



4. Pătratul $ABCD$ are perimetrul de 24 cm. Distanța de la punctul A la dreapta BD este de:
- A) 6 cm B) $6\sqrt{2}$ cm C) 3 cm D) $3\sqrt{2}$ cm.

Ce știi deja? Verific!

Test de (auto)evaluare

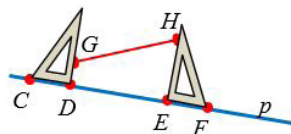
Timp de lucru: 45 minute

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni și rezultate necesare pentru parcurgerea acestei Unități de învățare. Fiecare problemă propusă valorează 1 punct. Se acordă 1 punct din oficiu.

I. Scrie pe foaia de rezolvare cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.

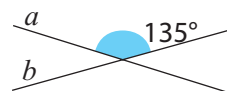
Proiecții pe o dreaptă

1. Proiecția pe dreapta p a segmentului GH din imaginea alăturată este segmentul



Măsura unghiului a două drepte

2. În figura alăturată, măsura unghiului dintre dreptele a și b este de°.



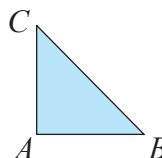
Drepte perpendiculare

3. Două drepte sunt perpendiculare dacă

II. Scrie pe foaia de rezolvare litera corespunzătoare răspunsului corect pentru problemele următoare.

Teorema lui Pitagora

4. În triunghiul dreptunghic din imagine, în care $AB = 4$ cm și $AC = 5$ cm, lungimea laturii BC este:



A. 3 cm; B. 9 cm; C. $\sqrt{41}$ cm; D. 32 cm.

Lungimea cercului

5. Un cerc are diametrul de 8 cm. Lungimea cercului, exprimată în cm, este de:

A. 8π ; B. 32; C. 4π ; D. 16π .

Legături între paralelism și perpendicularitate

6. În dreptunghiul $ABCD$, perpendicularele din A și C pe diagonala BD intersectează CD și AB în E , respectiv F .

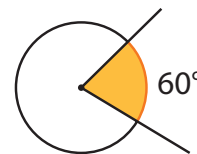
Dacă $AD = 12$ cm și $DE = 5$ cm, atunci $CF =$

A. $5\sqrt{2}$ cm; B. 5 cm; C. 12 cm; D. 13 cm.

III. Scrie pe foaia de rezolvare soluțiile complete ale exercițiilor următoare.

Aria sectorului de cerc

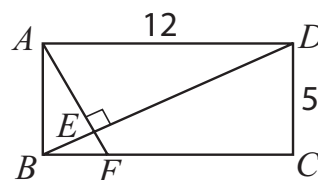
7. Cercul din figura alăturată are raza de 2 cm. Aproximează la un număr întreg de milimetri pătrați aria sectorului de cerc, delimitat de un unghi la centru cu măsura de 60° .



Teorema înălțimii. Teorema catetei

8. În dreptunghiul $ABCD$, piciorul perpendiculei din A pe diagonala BD este punctul E . Dacă dimensiunile dreptunghiului sunt 5 cm, respectiv 12 cm, calculează:

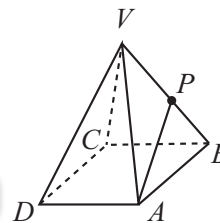
a) BE ; b) AE .



Dacă ai obținut mai puțin de jumătate din punctaj la acest test, este util să revezi definițiile și proprietățile verificate mai sus, pentru a înțelege mai bine ceea ce urmează.

O situație-problemă

O seră are forma unei piramide patrulateră regulată $VABCD$, cu $VA = AB = 4$ m. Punctul P este mijlocul muchiei VB , iar AP este un cablu. Cu câte grade este înclinat cablul AP față de dreapta CD ?

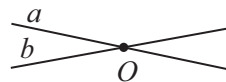


Vrem să știm! Cum determinăm măsura unghiului a două drepte necoplanare?

➔ 1. Ce înțelegem prin măsura unghiului a două drepte concurente?

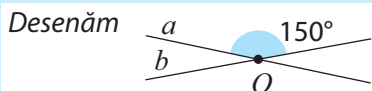
Să ne amintim

Două drepte concurente formează două perechi de unghiuri opuse la vârf. În acest fel, unei perechi de drepte îi corespund două măsuri de unghiuri. Pentru a caracteriza înclinarea unei drepte față de cealaltă este suficient să considerăm doar una dintre aceste măsuri; prin convenție, o alegem pe cea mai mică.



Definiții

• **Măsura unghiului** dintre două drepte concurente este cea mai mică dintre măsurile unghiurilor formate de aceste drepte.



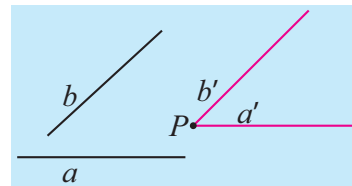
Interpretăm
Măsura unghiului dintre dreptele a și b este de 30° .

Notăm
 $\sphericalangle(a; b) = 30^\circ$

• Două drepte concurente sunt **perpendiculare** dacă măsura unghiului dintre ele este de 90° .

➔ 2. Cum definim măsura unghiului a două drepte necoplanare?

Considerăm două drepte necoplanare a și b și un punct P în spațiu, exterior ambelor drepte. În conformitate cu axioma paralelelor, prin P putem construi dreptele a' și b' , astfel încât $a' \parallel a$ și $b' \parallel b$.



Definiții

Măsura unghiului dintre două drepte a și b din spațiu este măsura unghiului ascuțit format de paralele la acestea, duse printr-un punct din spațiu.

Punctul poate fi exterior dreptelor, sau poate fi situat pe oricare dintre ele.

Dacă măsura unghiului dintre două drepte necoplanare, a și b este egală cu 90° , spunem că dreptele a și b sunt **perpendiculare**.

Dacă dreptele sunt paralele, unghiul lor este 0° .

Rezolvăm situația-problemă

$$CD \parallel AB \Rightarrow \sphericalangle(CD, AP) \equiv \sphericalangle(AB, AP) \equiv \sphericalangle PAB.$$

$VA = VB = AB = 4$ m, deci $\triangle VAB$ este echilateral, de unde rezultă $\sphericalangle VAB = 60^\circ$.

P este mijlocul muchiei VB . Rezultă că AP este mediană în $\triangle VAB$

Ca urmare, AP este bisectoarea unghiului VAB , deci $\sphericalangle PAB = 30^\circ$

Evaluăm nivelul de bază

- $ABCD$ este tetraedru regulat, iar E , F și G mijloacele muchiilor AB , AC , respectiv BC . Care este măsura unghiului dintre EF și CD , respectiv EF și CG ?
- $ABCD A'B'C'D'$ este cub. Care este măsura unghiului dintre AC și BD , $A'B'$ și AC , respectiv $A'C'$ și BD ?

●●●●▷ Problemă rezolvată

Piramida triunghiulară regulată $SABC$ are fețele laterale triunghiuri dreptunghice. Dacă M este mijlocul lui BC , calculează unghiul dreptelor SM și AB .

Rezolvare

Cum redactăm?

Prin punctul M trasăm $MN \parallel AB$.

Unghiul cerut este $\sphericalangle SMN$.

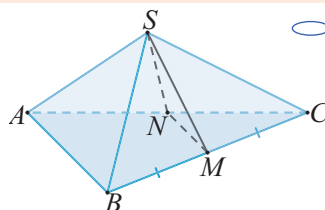
În triunghiul ABC , MN este linie mijlocie, deci

$$MN = \frac{AB}{2}. \text{ Totodată, } SM = \frac{BC}{2} \text{ și } SN = \frac{AC}{2},$$

ca mediane ce corespund ipotenuzelor în triunghiurile dreptunghice SBC și SAC .

În consecință, $\triangle SMN$ este echilateral.

De aceea, $\sphericalangle(SM, AB) = \sphericalangle SMN = 60^\circ$.



Cum gândim?

Construim o paralelă la una din dreptele din enunț.

●●●●▷ Probleme propuse

- Unghiul AOB are măsura de 120° . Ce măsură are $\sphericalangle(AO; OB)$?
- În paralelogramul $ABCD$, $\sphericalangle BAD = 70^\circ$, S este mijlocul lui BC și $P \in AB$, $\sphericalangle PSC = 138^\circ$.
Ce măsuri au:
a) $\sphericalangle PSB$; b) $\sphericalangle(PS; CD)$; c) $\sphericalangle(PS; AD)$?
- Alege răspunsul corect! Fie cubul $ABCD A'B'C'D'$. Care afirmație este adevărată?
A. $\sphericalangle(A'D'; BC) \equiv \sphericalangle(AD; BC)$;
B. $\sphericalangle(DD'; AB) \equiv \sphericalangle(AA'; AB) \equiv \sphericalangle A'AB$;
C. $\sphericalangle(D'C'; BD) \equiv \sphericalangle(DC; BD) \equiv \sphericalangle BDC$;
D. $\sphericalangle(D'C'; AD) \equiv \sphericalangle(DC; AD) \equiv \sphericalangle ADC$.
- În cubul $ALGEBRIC$, calculează măsurile unghiurilor:
a) $\sphericalangle(AL; EL)$; d) $\sphericalangle(LI; CE)$;
b) $\sphericalangle(AL; RI)$; e) $\sphericalangle(AC; RG)$;
c) $\sphericalangle(BL; LG)$; f) $\sphericalangle(GC; RL)$.
- Paralelogramele $ABCD$ și $BEFA$ se află în plane diferite. Știm că $\sphericalangle BAD = \sphericalangle FAD = 40^\circ$. Fie P și S mijloacele segmentelor AF și FD . Calculează măsurile unghiurilor: a) $\sphericalangle(FA; PS)$;
c) $\sphericalangle(FA; BC)$; b) $\sphericalangle(EB; AD)$; d) $\sphericalangle(PS; DC)$.
- $ABCD$ este tetraedru regulat cu M, N, P, Q, R mijloacele muchiilor AC, BC, BD, AD , respectiv, CD . Află măsura unghiurilor dintre:
a) MN și PQ ; b) MQ și BC ;
c) AM și PR ; d) PQ și AM .
- În tetraedrul $ABCD$, notăm cu E și F centrele de greutate ale fețelor ABC și ABD și cu M mijlocul muchiei CD .
Demonstrează că $EF \perp AM$ dacă și numai dacă $AC \equiv AD$.
- $SPACE$ este piramidă patrulateră regulată cu $SP = 10$ cm și $AP = 12$ cm. Punctul M aparține muchiei SC , astfel încât perimetrul triunghiului MAE este minim. Calculează tangenta unghiului dintre dreptele SP și AM .

●●●●▷ Alege și rezolvă în 5 minute!

A

$VABCD$ este piramidă patrulateră regulată cu $AB = 12$ cm și $VA = 10$ cm. Determină sinusul unghiului dintre dreptele BC și VA .

B

Pătratul $ABCD$ și rombul $ABMN$ sunt situate în plane diferite și $\sphericalangle DAN = 124^\circ$. Determină măsura unghiului dintre dreptele AD și CM .

C

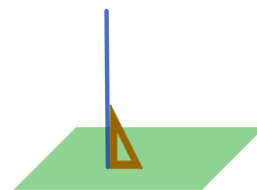
$ABCD A'B'C'D'$ este paralelipiped dreptunghic cu $AA' = 6\sqrt{3}$ cm, $A'D = 2\sqrt{43}$ cm și $A'B = 12$ cm. Determină tangenta unghiului dintre dreptele $A'B'$ și BD .

Lecția 2

Dreapta perpendiculară pe plan. Distanța de la un punct la un plan

O situație-problemă

Mati trebuie să monteze un dispozitiv pentru irigarea grădinii. Instrucțiunile prevăd că suportul trebuie fixat perfect perpendicular pe sol. Mati face o verificare folosind un echer de lemn, așa cum se vede în imagine. Este suficientă această verificare?



Vrem să știm!

Ce condiții trebuie să îndeplinească o dreaptă pentru a fi perpendiculară pe un plan? Ce înțelegem prin distanța de la un punct la un plan?

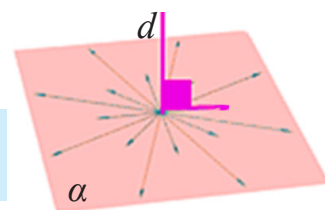
1. Cum definim o dreaptă perpendiculară pe un plan?

Să ne amintim

Două drepte din spațiu, concurente sau necoplanare, sunt **perpendiculare** dacă formează un unghi drept.

Definiție

Dreapta d perpendiculară pe toate dreptele incluse în planul α se numește **dreaptă perpendiculară pe planul α** .



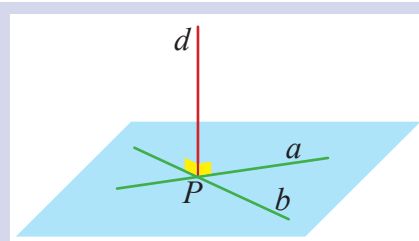
Teoremă

Dacă dreapta d este perpendiculară pe două drepte concurente, atunci dreapta d este perpendiculară pe planul determinat de cele două drepte.



$$\left. \begin{array}{l} d \perp a \\ d \perp b \\ a \cap b = \{P\} \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp (a; b).$$

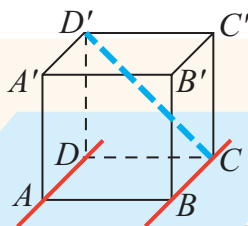
Redactăm astfel:



Exprimare orală

Putem formula teorema și astfel: Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente dintr-un plan, atunci dreapta este perpendiculară pe plan.

De ce crezi că este necesar, în enunțul de mai sus, ca cele două drepte să fie concurente? Analizează situația sugerată în imagine și observă că $CD' \perp BC$ și $CD' \perp AD$, dar CD' nu este perpendiculară și pe dreapta CD .



Gândim critic și constructiv!

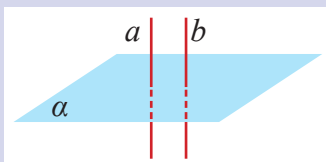
Rezolvăm situația-problemă

Făcând o singură verificare, Mati se asigură că suportul este perpendicular doar pe o dreaptă din planul solului, ceea ce nu este suficient. Trebuie să așeze echerul încă într-o poziție, pentru a verifica dacă suportul este perpendicular pe două drepte concurente din plan.

Teoreme

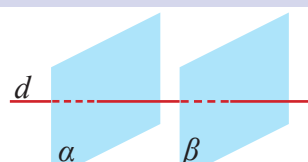
Două drepte distincte perpendiculare pe același plan sunt paralele.

$$\left. \begin{array}{l} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b.$$



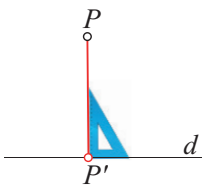
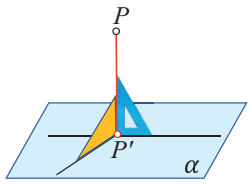
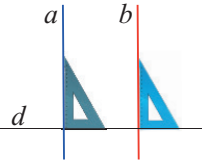
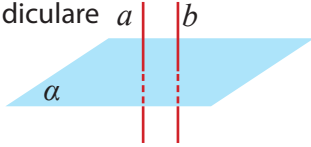
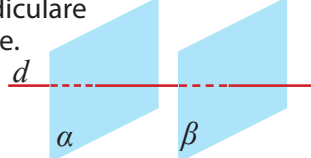
Două plane distincte perpendiculare pe aceeași dreaptă sunt paralele.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \perp d \\ \beta \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta.$$



➔ 2. Ce proprietăți au dreptele perpendiculare pe un plan?

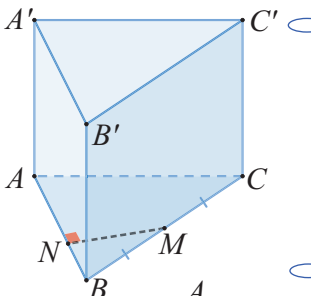
●●●●▶ Ne amintim și generalizăm!

În plan	În spațiu
Dintr-un punct se poate construi o singură perpendiculară pe o dreaptă dată. Distanța de la punctul P la dreapta d este lungimea segmentului PP', unde $PP' \perp d, P' \in d$. Scriem: $PP' \perp d \Rightarrow d(P, d) = PP'$. 	Teoremă: Dintr-un punct se poate construi o singură perpendiculară pe un plan dat. Definiție: Distanța de la punctul P la planul α este lungimea segmentului PP', unde $PP' \perp \alpha, P' \in \alpha$. Scriem: $PP' \perp \alpha \Rightarrow d(P, \alpha) = PP'$. 
Două drepte distincte, perpendiculare pe o aceeași dreaptă, sunt paralele între ele. Scriem: $a \perp d, b \perp d, a \neq b \Rightarrow a \parallel b$. 	Teoreme: • Două drepte distincte perpendiculare pe același plan sunt paralele. $\left. \begin{array}{l} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$  • Două plane distincte perpendiculare pe aceeași dreaptă sunt paralele. $\left. \begin{array}{l} \alpha \perp d \\ \beta \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ 

●●●●▶ Problemă rezolvată

Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are $AB = 4$ cm. Dacă M este mijlocul lui BC , calculează distanța de la punctul M la planul (ABB') .

Rezolvare

Cum redactăm?	Cum gândim?
Să notăm N piciorul perpendicularei din M pe AB. Vom arăta că $MN \perp (ABB')$, așadar că MN este distanța cerută. Avem $BB' \perp (ABC)$, iar $MN \subset (ABC)$, de unde deducem că $BB' \perp MN$, relație pe care o scriem convenabil în forma $MN \perp BB'$. Deoarece avem și $MN \perp AB$, înseamnă că MN este perpendiculară pe dreptele BB' și AB incluse în planul (ABB'), iar aceste drepte sunt concurente în B. În consecință, $MN \perp (ABB')$. În $\triangle NBM$, $\sin \angle NBM = \frac{MN}{BM}$, de unde $\sin 60^\circ = \frac{MN}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{MN}{2} \Rightarrow MN = \sqrt{3}$ cm.	 Trebuie să calculăm lungimea unui segment dus din M perpendicular pe (ABB') Arătăm că MN este perpendiculară pe două drepte concurente din planul (ABB')

●●●●▶ Evaluăm nivelul de bază

1. $ABCA'B'C'D'$ este cub cu $AB = 10$ cm. Calculează distanța de la punctul A la planul $B'BC$.
2. $ABCA'B'C'D'$ este paralelipiped dreptunghic cu $AB = 10$ cm. La ce distanță de planul $(A'AD)$ se află B ?

●●●●▷ **Probleme propuse**

- ★
1. Echerile ADB și ADC , cu ipotenuzele BD , respectiv CD , au fost așezate pe o masă, ca în figură. Arată că $AD \perp BC$.
 2. *Adevărat sau fals?* Două drepte distincte, perpendiculare pe un plan, sunt paralele.
 3. Triunghiul ABC este dreptunghic în A cu $AB = 12$ cm și $AC = 12\sqrt{3}$ cm. Pe planul triunghiului se ridică o perpendiculară în B pe care se ia un punct V , astfel încât $VB = 9$ cm.
 - a) Determină aria triunghiului VBC .
 - b) Determină măsura unghiului ACB .
 - c) Demonstrează că $AC \perp (VAB)$.
 4. Identifică într-un paralelipiped dreptunghic $ABCDEFGH$ muchiile perpendiculare pe fața $BCGF$.
 5. Considerăm $ABCD$ un tetraedru în care $AD \perp BC$. Fie AE înălțimea din A a triunghiului ABC ($E \in BC$). Demonstrează că:
 - a) $BC \perp (AED)$;
 - b) DE este înălțimea din D a triunghiului BDC .
 6. *Alege răspunsul corect!* În cubul $ABCDEFGH$, care dintre următoarele drepte este perpendiculară pe planul (ABG) ?
 - A) AE ; B) AC ; C) FC ; D) HC .
 7. În triunghiul echilateral ABC , cu $AB = 12$ cm, M este mijlocul laturii AB . Pe planul triunghiului se ridică o perpendiculară în C pe care se ia un punct S , astfel încât $SM = 12$ cm.
 - a) Calculează aria triunghiului SCM .
 - b) Arată că $AB \perp (SCM)$.
 8. În piramida $VABCD$, notăm $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă $AV \equiv CV$, $DV \equiv BV$, $OB \equiv OD$ și $OC \equiv OA$, demonstrează că $VO \perp (ABC)$.
 9. $ABCD$ este dreptunghi cu $AB = 12$ cm, $AD = 9$ cm. Pe planul dreptunghiului se ridică o perpendiculară în D pe care se ia un punct V , astfel încât $VD = 9$ cm.
 - a) Determină tangenta unghiului dintre dreptele CD și VB .
 - b) Demonstrează că $BC \perp (VDC)$ și $AB \perp (VAD)$.
 10. $ABCD$ este romb cu $BD = 12$ cm, $AC = 16$ cm, iar $AC \cap BD = \{O\}$. Fie $SA \perp (ABC)$ cu $SA = 10$ cm.
 - a) Arată că $BD \perp SC$.
 - b) Determină măsura unghiului dintre dreptele CD și SB .
 11. $ABCD A'B'C'D'$ este cub cu $AB = 8$ cm. Calculează:
 - a) distanța de la punctul B la planul $AA'C$
 - b) distanța de la centrul lui $ABCD$ la planul $A'AB$.
 12. O cameră are forma unui paralelipiped dreptunghic, cu lungimea 6 m, lățimea 4 m și înălțimea 2,5 m. În punctul de intersecție a diagonalelor tavanului este atârnat un bec, cablul având 30 cm. Calculează distanța de la bec la cele 6 fețe ale paralelipipedului.
 13. Triunghiul ABC este echilateral cu $AB = 6$ dm. De aceeași parte aplanului ABC construim $DA \perp (ABC)$ și $EB \parallel DA$ astfel încât $EB = 8$ dm, $AD = (8 + x)$ dm, $x > 0$. Determină numărul real x , știind că triunghiul EDC este dreptunghic în E .
 14. $ABCD A'B'C'D'$ este cub cu $AE \perp (D'DB)$ și $CF \perp (D'DB)$ cu $E, F \in (D'DB)$. Arată că dreptele AE și CF coincid.
 15. Demonstrează că, în cubul $ABCDEFGH$, patrulaterul $ABGH$ este un dreptunghi.

●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A

ALGEBRIC este cub. Arată că $AG \perp (CEL)$.

B

LIMP este dreptunghi și $O \notin (LIM)$, $OL \perp (LIM)$. Arată că $MI \perp (OLI)$.

C

SIMULARE este paralelipiped dreptunghic cu $IT \perp SM$, $T \in SM$. Arată că $IT \perp (SMR)$.

Lecția 3 Înălțimea piramidei

●●●●▷ O situație-problemă

Ana vrea să confecționeze un foisor rudimentar. Pentru scheletul acestuia, folosește trei bețe, de câte 2 m fiecare, pe care le așază astfel încât punctele de sprijin pe sol să fie la 1,5 m unul de altul. Ana vrea ca înălțimea foisorului să fie de cel puțin 1,8 m. Este realizabilă dorința ei?



●●●●▷ Să ne amintim

Piramida regulată este piramida cu baza poligon regulat și muchiile laterale congruente.

Vrem să știm! >>>

Ce este înălțimea piramidei?

Definiție >>>

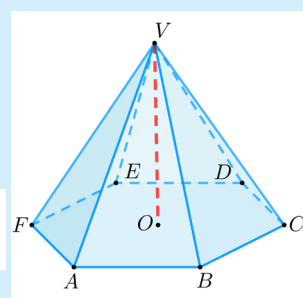
Distanța de la vârful piramidei la planul bazei se numește **înălțimea piramidei**.



Observație: În funcție de context, uneori, prin **înălțimea piramidei** vom înțelege segmentul care are ca extremități vârful piramidei și, respectiv, piciorul perpendicularei construite din vârful pe planul bazei.

Exemplu: În piramida hexagonală alăturată, construim $VO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$. VO este înălțimea piramidei.

Într-o piramidă regulată, înălțimea intersectează planul bazei în centrul acesteia.



●●●●▷ Exprimare orală

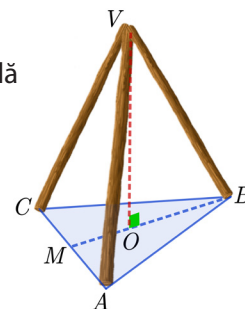
În figura de mai sus este reprezentată o piramidă regulată. Argumentează congruența segmentelor OA , OB , OC , ..., utilizând metoda triunghiurilor congruente aplicată pentru $\triangle VOA$, $\triangle VOB$, $\triangle VOC$, ...

●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

$VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată, cu latura bazei 1,5 m și muchia laterală 2 m. Trebuie să calculăm înălțimea VO . Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle VOB$, dreptunghic în O și obținem $VO = \sqrt{325}$ dm.

Comparăm cu înălțimea dorită de Ana: $1,8 \text{ m} = 18 \text{ dm} = \sqrt{324} \text{ dm} < VO$.

Așadar, foisorul va avea înălțimea mai mare de 1,8 m.



●●●●▷ Problemă rezolvată

Se dau punctele necoplanare A, B, C, D astfel încât $AB = BD = 3\sqrt{3}$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = AD = CD = 3$ cm. Calculează distanța de la punctul D la planul (ABC) .

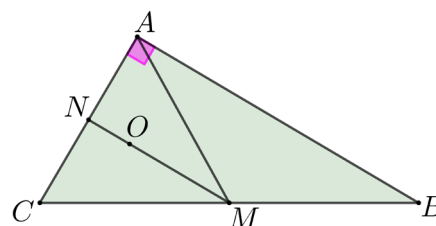
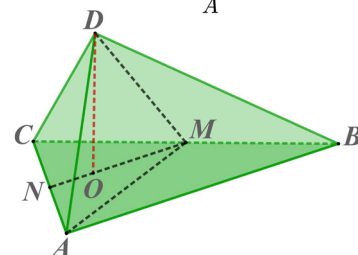
Rezolvare: Deoarece $(3\sqrt{3})^2 + 3^2 = 6^2$, deducem că $\triangle ABC$ și $\triangle DBC$ sunt dreptunghice, cu ipotenuza BC . Fie M mijlocul lui BC .

AM și DM fiind mediane corespunzătoare ipotenuzei în cele două triunghiuri dreptunghice, se obține $AM = DM = 3$ cm.

Așadar, $\triangle AMC$ este echilateral și având $DA = DC = DM = 3$ cm, $DAMC$ este piramidă triunghiulară regulată. Distanța cerută este înălțimea DO a acestei piramide.

$OM = \frac{2}{3} \cdot MN = \sqrt{3}$ cm.

Aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle DOM$, dreptunghic în O , rezultă $DO = \sqrt{6}$ cm.



Câte muchii egale cu 3 cm are tetraedrul $MABD$ din figura anterioară?
 $MABD$ este piramidă regulată? Justifică răspunsurile!

**Gândim critic
și constructiv!**

●●●●▷ **Evaluăm nivelul de bază**

1. $VABCD$ este piramidă patrulateră regulată cu $VO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$, $VA = 6$ cm, $AB = 8$ cm. Calculează înălțimea piramidei.
2. $VABCDEF$ este o piramidă hexagonală regulată cu $VA = 10$ cm, $AB = 8$ cm. Determină distanța de la V la planul bazei.

●●●●▷ **Probleme propuse**

1. *Adevărat sau fals?* Înălțimea unei piramide patrulateră regulate este segmentul ce unește vârful piramidei cu intersecția diagonalelor bazei.
2. Un acoperiș are forma unei piramide patrulateră regulate, cu muchiile laterale de 9 m și latura bazei de 8 m. Calculează înălțimea acoperișului.
3. VO este înălțimea piramidei regulate $VABCD$, cu $AB = 10$ cm și aria unei fețe laterale $25\sqrt{3}$ cm². Calculează: **a)** VO ; **b)** măsura unghiului dintre VO și o muchie laterală.
4. O este centrul triunghiului echilateral ABC și SO este înălțimea piramidei $SABC$. Demonstrează că $SA \equiv SB \equiv SC$.
5. De Anul Nou, în centrul unei piețe în formă de pătrat a fost fixat un brad înalt de 14 m, perpendicular pe sol. Pentru stabilitate, bradul a fost ancorat de colțurile pieței cu patru corzi de 26 m fiecare. Calculează aria pieței.
6. Un tetraedru regulat are muchia de 18 cm. Calculează înălțimea tetraedrului.
7. Două piramide patrulateră regulate având toate muchiile egale cu 1 cm se atașează astfel încât să aibă baza comună. Apoi se face un orificiu de-a lungul înălțimilor, după care mai multe astfel de piese se pun pe un șirag, ca în imagine. Care este cel mai mare număr de piese care pot fi înșirate pe un șirag de 50 cm?
8. $VABCDEF$ este piramidă hexagonală regulată cu $AB = 9$ cm și perimetrul triunghiului $VAD = 48$ cm. Calculează înălțimea piramidei.
9. $ABCD A'B'C'D'$ este cub. **a)** Demonstrează că $BACB'$ și $D'ACB'$ sunt piramide triunghiulare regulate. **b)** Folosește punctul **a)** pentru a demonstra că $BD' \perp (ACB')$.
10. O piramidă patrulateră are muchiile laterale congruente. Demonstrează că piciorul înălțimii piramidei este la distanță egală de vârfurile bazei. Baza piramidei poate fi paralelogram?
11. $VABCDEF$ este piramidă hexagonală regulată cu $VA = 9\sqrt{2}$ cm și măsura unghiului dintre BC și VA egală cu 45° . Determină: **a)** înălțimea piramidei. **b)** distanța de la A la planul (VBE) .

●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

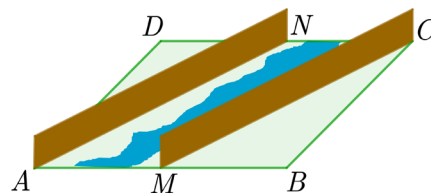
A Calculează înălțimea unei piramide patrulateră regulate cu apotema de 13 cm și latura bazei de 24 cm.

B VO este înălțime în piramida hexagonală regulată $VABCDEF$. Dacă $VO = 10$ cm și $AB = 4\sqrt{3}$ cm, află distanța de la punctul D la planul (VOB) .

C În tetraedrul regulat $ABCD$, M este mijlocul lui AB . Arată că simetricul lui M față de mijlocul înălțimii din D se află în exteriorul tetraedrului.

O situație-problemă

Un teren aflat în posesia familiei lui Tic este traversat de un canal, ca în imaginea alăturată. Terenul are forma unui dreptunghi $ABCD$, cu $AB = 32$ m, $BC = 12$ m. Pentru protecție, au fost amplasate două garduri verticale. Acestea trec prin câte un colț al terenului și mijlocul unei laturi. Tic ar dori să afle distanța dintre garduri. Cum să procedeze?



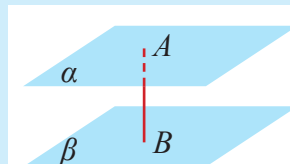
Vrem să știm!

Cum definim distanța dintre două plane paralele? Ce este înălțimea prisme?

Definiție

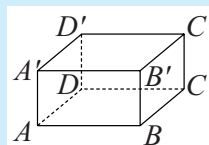
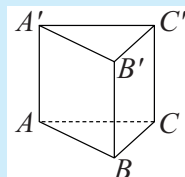
Distanța dintre planele paralele α și β este distanța de la un punct oarecare A al planului α la planul β .

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ A \in \alpha, AB \perp \beta, B \in \beta \end{array} \right\} \Rightarrow d(\alpha, \beta) = d(A, \beta) = AB.$$



Definiții

- Prisma cu o muchie laterală perpendiculară pe planul bazei se numește **prismă dreaptă**. În consecință, toate muchiile laterale ale prisme sunt perpendiculare pe planul bazei, iar toate fețele laterale sunt dreptunghiuri.
- Distanța dintre bazele prisme se numește **înălțimea prisme**. Evident, în orice prismă dreaptă muchiile laterale sunt înălțimi ale prisme, deoarece sunt perpendiculare pe planele bazelor.
- Paralelipipedul dreptunghic** și **cubul** reprezintă cazuri particulare de prisme drepte.

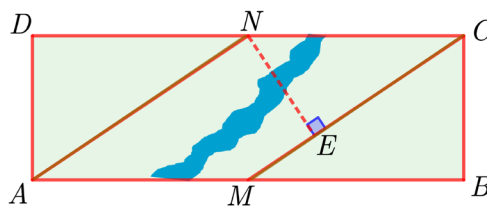


Rezolvăm situația-problemă

Cele două garduri reprezintă plane paralele. Distanța dintre ele este înălțimea paralelogramului $AMCN$, aceasta fiind perpendiculară pe ambele plane. Vom calcula înălțimea folosind aria lui $AMCN$.

Trasăm $NE \perp CM$. Aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle MBC$, obținem $MC = 20$ (m). $A_{AMCN} = AM \cdot CB = 192$ (m²).

Totodată, $A_{AMCN} = MC \cdot NE = 20 \cdot NE$, de unde $NE = \frac{192}{20} = 9,6$ (m).



Exprimare orală

Explică de ce, în problema de mai sus $AMCD$ este paralelogram și de ce gardurile reprezintă plane paralele.

Evaluăm nivelul de bază

- O prismă dreaptă are latura bazei 4 cm și aria unei fețe laterale 12 cm². Află înălțimea prisme.
- $ABCA'B'C'$ este prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral. Știind că suma tuturor muchiilor este 27 cm și înălțimea prisme este 5 cm, calculează latura bazei.

●●●●▷ Problemă rezolvată

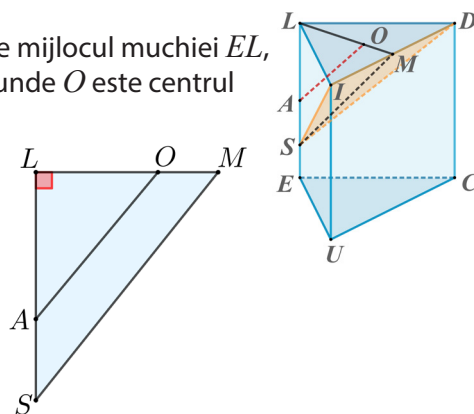
EUCLID este prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral. A este mijlocul muchiei EL , iar S se află pe EA , astfel încât $AS = 4$ cm. Știind că $AO \parallel (SID)$, unde O este centrul cercului circumscris bazei, calculează înălțimea prisme.

Rezolvare:

Notăm M mijlocul lui ID . În $\triangle LID$ echilateral, $LO = 2 \cdot OM$. Deoarece $AO \parallel (SID)$, $AO \subset (LSM)$, $(SID) \cap (LSM) = SM \Rightarrow AO \parallel SM$.

Din teorema lui Thales se obține:

$$\frac{LA}{AS} = \frac{LO}{OM} = 2 \Rightarrow LA = 8 \text{ cm, de unde obținem } EL = 16 \text{ cm.}$$



●●●●▷ Probleme propuse

1. Alege răspunsul corect! $ABCD A'B'C'D'$ este un cub cu perimetrul unei fețe de 28 cm. Distanța dintre două fețe opuse ale cubului este de:

A) 28 cm; B) 14 cm; C) 10 cm; D) 7 cm.

2. Adevărat sau fals? Dacă toate fețele laterale ale unei prisme sunt dreptunghiuri, atunci prisma este dreaptă.

★★

5. Două din fețele unui trunchi de piramidă (mai precis, bazele acestuia) sunt situate în plane paralele. Definește ce înseamnă înălțime a unui trunchi de piramidă. Realizează un desen, în care apare un trunchi de piramidă și o înălțime a acestuia.

★★★

7. Investigație

- În cubul **ALGEBRIC**, demonstrează că $AL \perp (BEC)$ și $AL \perp (LRI)$.
- Justifică afirmația: $(BEC) \parallel (LRI)$.
- Planele α și β sunt paralele, iar dreapta d este perpendiculară pe planul α . Ce relație este oare între dreapta d și planul β ? Justifică răspunsul.

★★★★

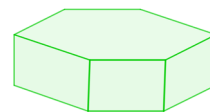
10. $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ este o prismă dreaptă cu bazele hexagoane regulate. Știind că raza cercului circumscris unei baze este 8 cm, calculează distanța dintre planele (ABB') și (FCC') .

3. O prismă dreaptă cu bazele triunghiuri echilaterale are aria unei fețe laterale 36 cm^2 și înălțimea 9 cm. Calculează latura bazei.

4. O prismă dreaptă cu bazele pătrate are diagonalele unei fețe laterale perpendiculare și egale cu 10 cm. Calculează înălțimea prisme.



6. O cutie de carton are forma unei prisme drepte cu baza hexagon regulat. Calculează latura bazei cutiei, știind că dacă înălțimea ei ar fi mărită cu 2 cm, suprafața cartonului necesar pentru pereții laterali ar crește cu 180 cm^2 .



8. $ABCD A'B'C'D'$ este prismă dreaptă cu baza pătrat. Știind că $AC = 12$ cm și $A'B = 6\sqrt{11}$ cm, calculează înălțimea prisme.

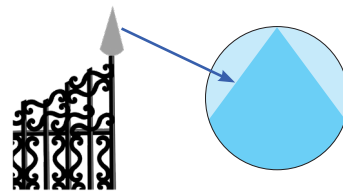
9. În trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$, notăm cu O și O' centrele bazelor. Demonstrează că distanța dintre bazele trunchiului de piramidă este OO' .

11. Demonstrează că o prismă este prismă dreaptă dacă și numai dacă toate înălțimile construite din vârfurile unei baze cad în interiorul sau pe frontiera celeilalte baze.

Fișă pentru portofoliu. Realizează desenul unei prisme hexagonale regulate. Marchează pe desen două înălțimi ale acestei prisme.

O situație-problemă

Stâlpul porții din fața casei lui Mati are în capăt un ornament de formă conică. Acesta s-a deteriorat și Mati vrea să-l înlocuiască. A decupat o bucată de tablă ca în imaginea alăturată. Va reuși Mati să refacă în acest mod ornamentul?



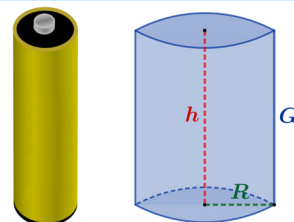
Vrem să știm!

Ce elemente caracteristice au cilindrul, conul și trunchiul de con?

Observăm și definim!

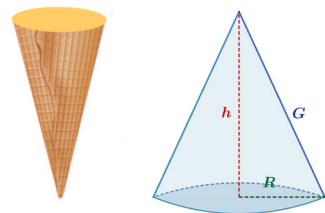
Dacă privim obiectele din jurul nostru, constatăm că nu toate sunt mărginite doar de suprafețe plane. Multe corpuri sunt delimitate și de suprafețe curbe. Să privim, de exemplu, o baterie. Seamănă cu o prismă, deosebirea fiind că bazele sunt cercuri. Un astfel de corp se numește **cilindru circular drept**, dar deseori îl vom numi, pe scurt, cilindru.

Bazele unui cilindru sunt două cercuri congruente, iar raza lor se mai numește **raza cilindrului**, de obicei notată R . Distanța dintre cele două baze ale unui cilindru se numește **înălțimea** cilindrului, cu notația uzuală h . Segmentul notat în figură G se numește **generatoare** a cilindrului. Generatoarea cilindrului circular drept este egală cu înălțimea acestuia.



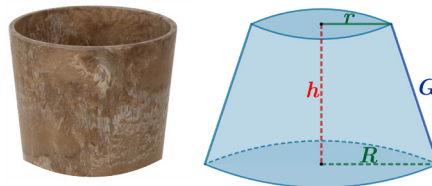
Oare cu ce seamănă un cornet de înghețată? Cu o piramidă, deosebirea fiind că baza este cerc. Un astfel de corp se numește **con circular drept**, sau, pe scurt, con.

Raza bazei se mai numește **raza conului**, notată în figură R . **Înălțimea** conului, notată de obicei h , este distanța de la vârf la planul bazei. Distanța de la vârful conului la orice punct al cercului de la bază se numește **generatoare** a conului, notată cel mai adesea G . Uneori, prin generatoare vom înțelege atât segmentul, cât și lungimea acestuia.



Un alt obiect, ghiveciul de flori, este materializarea corpului numit **trunchi de con circular drept**, numit deseori, pe scurt, trunchi de con. Evident, este asemănător trunchiului de piramidă, cu deosebirea că bazele sunt cercuri.

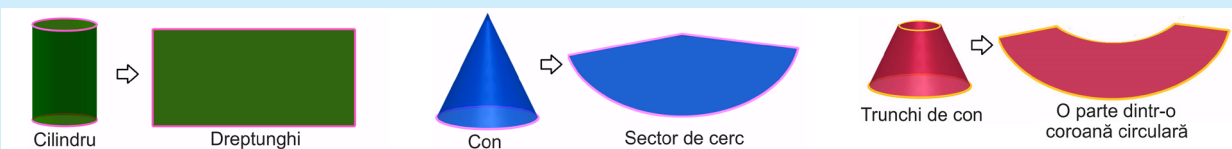
Bazele unui trunchi de con sunt două cercuri cu raze inegale, de unde și denumirile: **raza bazei mari**, R și **raza bazei mici**, r . Distanța dintre cele două baze se numește **înălțimea** trunchiului de con, h . Segmentul notat în figură G se numește **generatoare** a trunchiului de con.



Dacă secționăm („tăiem”) cilindrul, conul sau trunchiul de con cu **plane paralele cu baza**, se obține de fiecare dată un **cerc**, lucru ilustrat în imaginea alăturată.

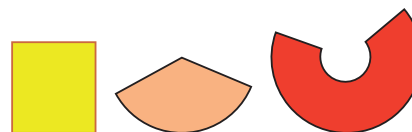


În ce privește desfășurarea suprafeței laterale a celor trei corpuri descrise, se obțin figuri geometrice plane conform imaginii de mai jos:



●●●●▷ Construim și explorăm!

Imaginile alăturate conțin desfășurări ale suprafețelor laterale pentru cilindru, con, trunchi de con. Folosește carton subțire și scotch pentru a construi fiecare desfășurare și corpul geometric respectiv.



●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

Pentru ca prin înfășurare să formeze suprafața laterală a unui con, Mati trebuia să decupeze un sector de cerc. Segmentele trebuie să fie raze ale cercului, așa ca în figura alăturată, nu coarde, așa cum a decupat Mati.



Cum ai putea să stabilești dacă o figură geometrică asemănătoare celei decupate de Mati este sau nu un sector de cerc?

Gândim critic și constructiv!

●●●●▷ Evaluăm nivelul de bază

Dacă raza bazei unui con este 6 cm și înălțimea 8 cm, cu cât este egală generatoarea?

●●●●▷ Probleme propuse

1. Identifică acasă la tine sau pe drumul de acasă la școală obiecte care să aibă formă de cilindru, con, trunchi de con.
2. Un cilindru are raza bazei egală cu 7 cm. Se secționează cu un plan paralel cu baza. Calculează aria secțiunii.
3. Un con are generatoarea de 3 m și înălțimea de 2 m. Calculează aria bazei conului.
4. Un trunchi de con are lungimile cercurilor de la baze egale cu 94,2 cm, respectiv 62,8 cm și generatoarea de 13 cm. Calculează înălțimea trunchiului, considerând $\pi = 3,14$.
5. Care este lungimea maximă a unei vergele care încapă într-o cutie de forma unui cilindru cu raza egală cu 8 dm și generatoarea egală cu 12 dm?
6. O pâlnie are forma unui con. Unghiul dintre o generatoare și înălțime are 30° și raza bazei este 6 cm. Determină înălțimea pâlniei.

i 7. Un număr de 6 țevi cilindrice, fiecare având diametrul exterior 10 cm, sunt așezate într-o stivă, ca în imaginea alăturată. Arată că înălțimea stivei este mai mică de 28 cm.



8. Un disc din hârtie, cu diametrul 24 cm, este tăiat în două părți egale. Din fiecare parte se confecționează câte un cornet. Cât este înălțimea unui cornet?

9. Pe un autovehicul ce are platforma înălțată la 60 cm de sol se transportă o piesă industrială de forma unui trunchi de con cu diametrele bazelor 4 m, respectiv 2 m și înălțimea 4 m. Poate acest autovehicul să treacă pe sub o pasarelă înaltă de 4,5 m?



●●●●▷ Alege și rezolvă în 5 minute!

A Prin desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru se obține un pătrat cu perimetrul 40 cm. Calculează generatoarea.

B Un trunchi de con cu $R = 6$ cm, $G = 5$ cm și $h = 3$ cm se secționează cu un plan paralel cu bazele, prin mijlocul înălțimii. Determină lungimea secțiunii.

C Un con are raza bazei 4 cm, iar distanța de la centrul bazei la o generatoare este 2 cm. Calculează înălțimea conului.

●●●●▷ O situație-problemă

Liza a amenajat lângă cabana părinților o mică terasă. A folosit o placă rigidă de formă pătrată, cu latura 3 m, pe care a fixat-o de pereții cabanei la 3 m de sol și pe doi stâlpi înalți de 2 m. Liza ar vrea să știe ce arie are suprafața care este ferită de ploaie sub această placă. Oare cum ar putea să calculeze?

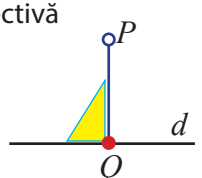
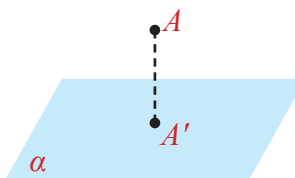
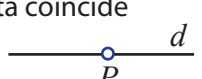
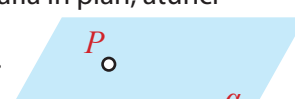
Vrem să știm!

Cum se obțin proiecțiile ortogonale pe un plan?



→ 1. Ce înseamnă proiecția unui punct pe un plan?

●●●●▷ Ne amintim și generalizăm!

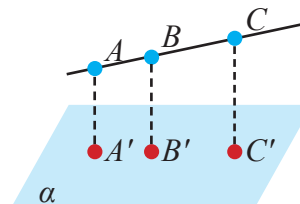
În plan	În spațiu
Proiecția ortogonală a unui punct exterior unei drepte pe dreapta respectivă este piciorul perpendicularei construite din acel punct pe dreaptă. $PQ \perp d, Q \in d \Rightarrow pr_d(P) = Q$ 	Definiție: Proiecția ortogonală a unui punct exterior unui plan pe planul respectiv este piciorul perpendicularei construite din acel punct pe plan. $A \notin \alpha, AA' \perp \alpha, A' \in \alpha \Rightarrow pr_\alpha A = A'$ 
Dacă punctul aparține dreptei, atunci proiecția punctului pe dreaptă coincide cu punctul respectiv. $P \in d \Rightarrow pr_d(P) = P$ 	Observație: Dacă punctul se află în plan, atunci proiecția punctului pe plan coincide cu punctul respectiv. $P \in \alpha \Rightarrow pr_\alpha(P) = P$ 

→ 2. Ce proprietăți au proiecțiile?

Teoremă Proiecțiile pe un plan ale unor **puncte coliniare** sunt **puncte coliniare**.
Altfel spus: Proiecția unei drepte pe un plan este o dreaptă sau un punct.

Demonstrație:

Fie planul α și fie A, B, C trei puncte coliniare, neincluse în α . Notăm cu A', B' și C' proiecțiile lor pe planul α . Trebuie să demonstrăm că A', B', C' sunt coliniare. Dreptele AA', BB' și CC' sunt paralele, fiind perpendiculare pe α . Deoarece fiecare dintre planele $(AA'B')$ și $(BB'C')$ conține dreptele concurente AC și BB' , aceste plane sunt identice. Cum A', B' și C' sunt puncte comune planelor α și $(AA'C')$, iar intersecția acestor plane este o dreaptă, deducem că A', B' și C' sunt coliniare.



●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

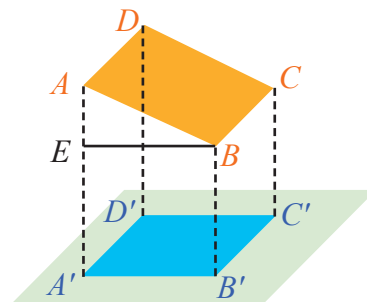
Să notăm $ABCD$ placa și $A'B'C'D'$ proiecția ei pe planul solului. Suprafața ferită de ploaie este această proiecție. $ADD'A'$ și $BCC'B'$ sunt dreptunghiuri, iar $ABB'A'$ și $CDD'C'$ sunt trapeze dreptunghice. Totodată, $A'B'C'D'$ este dreptunghi. Calculăm $A'B'$ în trapezul $ABB'A'$. Trasăm înălțimea BE .

$$AE = AA' - A'E = 1 \text{ m.}$$

Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle ABE$, dreptunghic în E și obținem:

$$BE = 2\sqrt{2} \text{ m} = A'B' \Rightarrow A_{A'B'C'D'} = 3 \cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2} (\text{m}^2).$$

Folosind aproximarea $\sqrt{2} \approx 1,41$, obținem $A_{A'B'C'D'} \approx 6 \cdot 1,41 = 8,46 (\text{m}^2)$.



Cum se modifică aria suprafeței ferite de ploaie dacă se modifică înălțimea celor doi stâlpi?

**Gândim critic
și constructiv!**

●●●●▷ Problemă rezolvată

Piramida patrulateră regulată $SABCD$ are $AB = 14$ cm. Calculează:

- lungimea proiecției laturii BC pe planul (SAC) ;
- lungimea proiecției segmentului AB pe planul (SCD) .

Rezolvare:

Cum redactăm?

Cum gândim?

- a)** Fie O intersecția diagonalelor AC și BD .
Deoarece piramida $SABCD$ este piramidă regulată, deducem că $SO \perp (ABCD)$ și SO, AC concurente. Observăm că $BO \perp SO$ și $BO \perp AC$, adică $BO \perp (SAC)$.

De aceea, proiecția punctului B pe (SAC) este punctul O .

$C \in (SAC)$, deci proiecția lui C pe planul (SAC) coincide cu C .

Așadar, proiecția segmentului BC pe (SAC)

este segmentul OC . Problema ne cere să calculăm lungimea acestui segment.

$$OC = \frac{AC}{2} = \frac{l\sqrt{2}}{2} = \frac{14\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2} \text{ cm.}$$

- b)** Deoarece $AB \parallel CD$, deducem că $AB \parallel (SCD)$.

Avem deci de calculat lungimea proiecției unui segment pe un plan paralel cu acesta.

Fie $AA' \perp (SCD)$, $BB' \perp (SCD)$,

unde $A', B' \in (SCD)$;

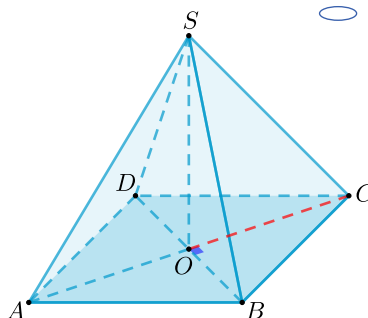
construcția făcută arată că $pr_{(SCD)}(AB) = A'B'$.

Deoarece $AA' \parallel BB'$, punctele A, B, A', B' sunt coplanare; aplicând teorema de paralelism a unei drepte cu un plan, deducem că $AB \parallel A'B'$. În plus, $\angle AA'B' = 90^\circ$, deoarece $AA' \perp (SCD)$.

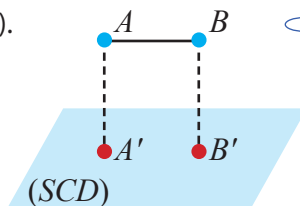
Din cele de mai sus, deducem că $AA'B'B$ este dreptunghi, deci $AB \equiv A'B'$.

Obținem:

$$pr_{(SCD)}(AB) = A'B' = AB = 14 \text{ cm.}$$



Identificăm
mai întâi
perpendiculara
din punctul B
pe planul (SAC) .



Identificăm
proprietățile
care descriu situația
din problemă.

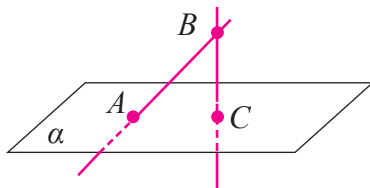
Dacă
folosim o anumită
teoremă, este util să o
enunțăm sau, dacă aceasta
are o denumire uzuală, să
explicăm ce teoremă se
aplică.

●●●●▷ Evaluăm nivelul de bază

- $ABCD A'B'C'D'$ este cub. Care este proiecția ortogonală a punctului B pe planul $(C'DC)$?
- O piramidă patrulateră regulată are latura bazei de 14 cm și înălțimea de 18 cm. Ce lungime are proiecția unei muchii laterale pe planul bazei?

●●●●▷ **Probleme propuse**

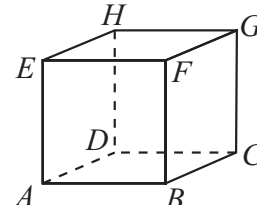
1. Adevărat sau fals? Proiecția unei drepte pe un plan este totdeauna o dreaptă.
2. În figura de mai jos, știm că $BC \perp \alpha$. Determină:
- $pr_{\alpha} B$;
 - $pr_{\alpha}(AB)$;
 - $pr_{\alpha}(BC)$;
 - $pr_{AC} B$;
 - $pr_{AC} A$;
 - $pr_{\alpha}(AC)$.



3. Alege răspunsul corect! În tetraedrul $PRIM$, proiecția punctului P pe planul (PIM) este:
- A) P B) R C) I D) M

4. În cubul $ABCDEFGH$ determină:

- $pr_{AB} E$;
- $pr_{AC} G$;
- $pr_{BH} H$;
- $pr_{(ABC)} H$;
- $pr_{(ABC)}(EG)$;
- $pr_{(BCG)}(BH)$.



5. $ABCD A'B'C'D'$ este paralelipiped dreptunghic cu $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, $AA' = 15$ cm. Calculează lungimile proiecțiilor lui AC' pe cele șase fețe ale paralelipipedului.
6. Punctele A, B, C , situate de aceeași parte a planului β , sunt coliniare, astfel încât $AB = 6$ cm și $BC = 9$ cm. Punctele A', B', C' sunt proiecțiile acestora pe planul β . Știind că $A'B' = 4$ cm, calculează lungimea segmentului $A'C'$.

7. Dreptunghiurile $ABCD$ și $ABEF$ au latura AB comună și sunt situate în plane diferite. Știm că $pr_{(ABE)} D = F$.
- Demonstrează că $DCEF$ este dreptunghi;
 - Arată că $CE \perp (AFB)$.
 - Determină $pr_{(BEF)} AC$;
 - Află lungimea proiecției segmentului BD pe planul (AEF) , dacă $AB = 4$ cm, $AF = 3$ cm.
 - Precizează $pr_{(ABE)}(O)$, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

8. Proiecția triunghiului ABC pe planul α este triunghiul $A'B'C'$. Demonstrează că proiecția centrului de greutate al triunghiului ABC pe α este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$.

9. $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ este prismă hexagonală regulată cu $AB = 6$ cm, $AA' = 12$ cm. Calculează lungimea proiecției segmentului $A'D$ pe planul (BCC') .

10. Secționând piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu un plan paralel cu baza, ce trece prin mijlocul muchiei VA , obținem trunchiul de piramidă $ABCD A'B'C'D'$. Știind că aria patrulaterului $ABCD$ este de 20 cm², calculează aria proiecției patrulaterului $A'B'C'D'$ pe planul (ABC) .
11. În piramida triunghiulară regulată $SABC$, O este centrul bazei. Determină $pr_{(SAO)}(BC)$.

12. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ are muchia bazei de 6 cm. Notăm cu M și N mijloacele muchiilor VA și respectiv VB . Calculează aria proiecției triunghiului CMN pe planul (ABC) .

13. Investigație

În ce situații umbrele corpurilor ar putea fi considerate proiecții ale acestora pe diverse plane?

●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A

Calculează lungimea proiecției diagonalei unui cub cu latura de 1 cm pe una dintre fețe.

B

$ABCD$ este tetraedru regulat, $A' = pr_{(BCD)} A$ și $A'D = 6\sqrt{3}$ cm. Calculează lungimea muchiei tetraedrului.

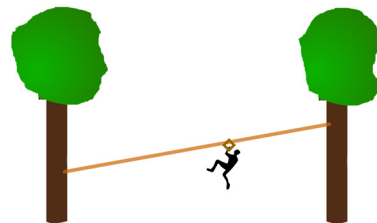
C

$ABCA'B'C'$ este prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral. Dacă $AB = AA' = 12$ cm, calculează lungimea proiecției segmentului $A'B$ pe planul (BCC') .

► O situație-problemă

Tiroliana este un sistem simplu de deplasare prin alunecare pe un cablu fixat între două puncte aflate la înălțimi diferite. Geo își ajută tatăl la instalarea unei tiroliene. Cablul, bine întins, este fixat între doi pomi din grădina casei, aflați la 30 m unul de altul. Terenul nu este înclinat.

Geo a aflat că, pentru a nu permite atingerea unei viteze prea mari, care ar putea duce la accidente, cablul trebuie să aibă un unghi de înclinare față de sol de 2-4 grade. Punctul situat mai jos a fost fixat la 1,5 m de sol. Cum poate stabili Geo la ce înălțime trebuie fixat celălalt capăt al cablului?



Vrem să știm! >>>

Cum aflăm măsura unghiului dintre o dreaptă și un plan?

Definiție >>>

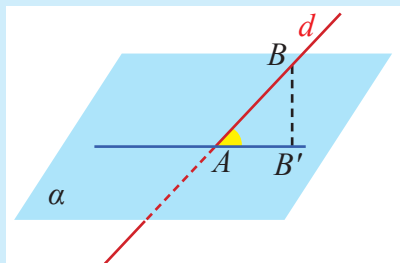
Fie o dreaptă care nu este perpendiculară pe un plan.

Măsura **unghiului dintre o dreaptă și un plan** este egală cu măsura unghiului dintre dreapta dată și proiecția sa pe planul respectiv.

$$\sphericalangle(d, \alpha) = \sphericalangle(d, pr_{\alpha} d).$$

Exemplu: În figura alăturată, $d \cap \alpha = \{A\}$. Alegem un punct B pe dreapta d , $B \neq A$, și notăm B' proiecția lui B pe plan. Unghiul dreptei d cu planul α este $\sphericalangle BAB'$.

În cazul în care $d \subset \alpha$ sau $d \parallel \alpha$, atunci $\sphericalangle(d, \alpha) = 0^\circ$, iar dacă $d \perp \alpha$, atunci $\sphericalangle(d, \alpha) = 90^\circ$.



► Exprimare orală

Folosește figura de mai sus pentru a explica de ce $AB' = AB \cdot \cos u$, unde u este unghiul format de dreapta AB cu planul α .

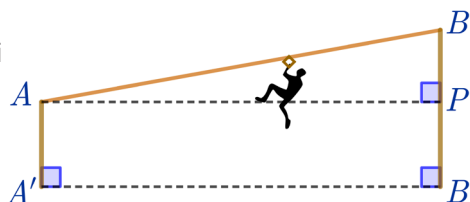
► Rezolvăm situația-problemă

Notăm A și B punctele în care este fixat cablul. Proiecția dreptei AB pe planul solului este dreapta $A'B'$, așadar unghiul format de cablu cu planul solului este unghiul dreptelor AB și $A'B'$.

$ABB'A'$ este trapez dreptunghic. Dacă $AP \perp BB' \Rightarrow AP \parallel A'B'$, așadar unghiul ce are măsura impusă între 2° și 4° este $\sphericalangle BAP$.

$$\operatorname{tg} \sphericalangle BAP = \frac{BP}{AP} \Rightarrow BP = AP \cdot \operatorname{tg} \sphericalangle BAP = 30 \cdot \operatorname{tg} \sphericalangle BAP.$$

Folosind un tabel trigonometric sau un calculator găsim $\operatorname{tg} 2^\circ \approx 0,035$ și $\operatorname{tg} 4^\circ \approx 0,07$, de unde $1,5 \text{ m} < BP < 2,10 \text{ m}$, valori care însumate la $B'P$ (care este 1,5 m) conduc la $2,55 \text{ m} < BB' < 3,60 \text{ m}$.



Dacă distanța dintre pomi ar fi mai mare, unghiul de înclinare a cablului față de sol ar fi mai mare?

Gândim critic și constructiv!

► Evaluăm nivelul de bază

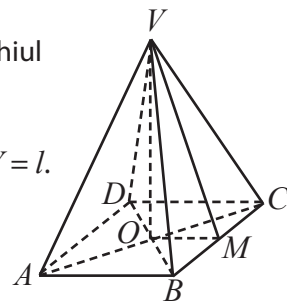
1. $VABCD$ este piramidă patrulateră regulată. Numește unghiul format de VD cu planul bazei.
2. Ce lungime are proiecția pe un plan a unui segment cu lungimea 8 cm, dacă dreapta care conține segmentul formează cu planul un unghi cu măsura de 60° ?

●●●●▷ Problemă rezolvată

$VABCD$ este piramidă patrulateră regulată, în care $\angle CVB = 60^\circ$. Calculează unghiul format de o muchie laterală cu planul bazei.

Rezolvare:

Notăm l lungimea muchiei bazei. Deoarece $\triangle VBC$ este echilateral $\Rightarrow CV = BV = l$. $ABCD$ este pătrat $\Rightarrow AC = l\sqrt{2}$. În $\triangle VAC$ obținem $l^2 + l^2 = (l\sqrt{2})^2$, de unde conform teoremei reciproce a lui Pitagora deducem că este dreptunghic în A ; cum triunghiul este isoscel, $\angle VAO = 45^\circ$.



●●●●▷ Probleme propuse

1. Proiecția segmentului AB pe planul α este segmentul AB' . Știind că $AB = 16$ cm, calculează lungimea segmentului AB' , dacă:
- a) $\angle(AB, \alpha) = 30^\circ$ b) $\angle(AB, \alpha) = 45^\circ$
 c) $\angle(AB, \alpha) = 60^\circ$ d) $\angle(AB, \alpha) = 90^\circ$

2. În cubul $ABCD A'B'C'D'$, calculează măsura unghiului format de AD' cu planul (BDD') .

4. Pentru susținerea unui pom s-au fixat în același punct de pe tulpină două prăjini drepte de lemn. Punctele de sprijin pe sol sunt situate față de tulpină la 5,5 m, respectiv 2 m. Dacă prima prăjină are lungimea 7,3 m, ce lungime are cealaltă?

6. O prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral are aria bazei $3\sqrt{3}$ cm² și aria unei fețe laterale $12\sqrt{3}$ cm². Calculează măsura unghiului format de o diagonală a unei fețe laterale cu planul unei baze.

7. O diagonală a unui paralelipiped dreptunghic formează cu cele trei fețe cu care are un vârf comun unghiuri cu măsurile u, v, w . Justifică relația $\cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 w = 2$.

9. Laturile AB și AD ale pătratului $ABCD$ formează cu planul α unghiuri cu măsura de 30° . Calculează măsura unghiului format de dreapta AC cu planul α .

3. O cutie de carton are forma unui paralelipiped dreptunghic, cu lungimea 35 cm și lățimea 12 cm. Dacă se introduce în cutie o baghetă subțire, ca în imagine, aceasta formează un unghi de 45° cu planul bazei. Calculează înălțimea cutiei.



5. O grămadă de nisip are forma unui con cu diametrul bazei 4 m. Generatoarea formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 30° . Arată că înălțimea grămezii este mai mică de 120 cm.



8. O placă de beton în formă de pătrat este prinsă de cârligul unei macarale cu patru cabluri de lungimi egale, care formează cu placa unghiuri de 30° . Dacă aceste cabluri se lungesc cu 1 m fiecare, unghiul pe care îl formează ele cu placa crește cu 15° . Demonstrează că latura plăcii este mai mare de 5 m.



10. Demonstrează că toate cele 12 muchii ale cubului $ABCDEFGH$ fac cu planul (ACF) unghiuri de măsuri egale. Identifică un alt plan, determinat de vârfuri ale cubului, având aceeași proprietate.

●●●●▷ Alege și rezolvă în 5 minute!

A

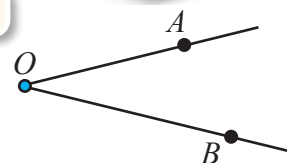
$ABCD A'B'C'D'$ este cub. Calculează măsura unghiului dintre $D'A$ și (ABC) .

B

Un trunchi de con are razele bazelor 3 cm și 8 cm, iar înălțimea este 5 cm. Calculează măsura unghiului format de generatoare cu planul bazei mari.

C

$VABCDEF$ este o piramidă hexagonală regulată, în care raportul dintre înălțime și latura bazei este $\sqrt{2}$. Calculează măsura unghiului format de VA cu planul (VBE) .



O situație-problemă

Planul monitorului și planul tastaturii unui laptop cum e cel din imaginea alăturată formează un diedru ($di = 2$ și $edru =$ față). Cum aflăm măsura diedrului?

Vrem să știm!

Care este analogul din spațiu al unghiului din plan?

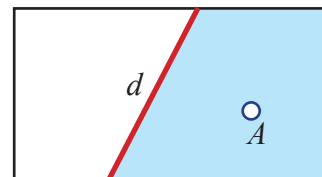
1. Ce este un diedru?

Ne amintim!

Un punct al unei drepte determină pe acea dreaptă două **semidrepte**. În imagine a fost evidențiată semidreapta OB . Punctul O este **originea** semidreptei.



O dreaptă dintr-un plan determină două **semiplane**. În imagine este evidențiat semiplanul determinat de dreapta d și punctul A . Dreapta d este **frontiera** semiplanului. Prin „frontieră” înțelegem dreapta de intersecție a celor două semiplane.

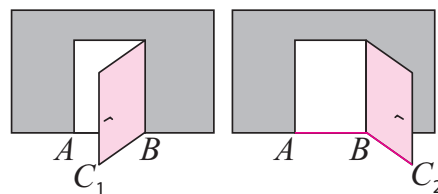


Comparăm și definim!

În plan		În spațiu	
Unghiul este figura plană formată de două semidrepte care au aceeași origine. Două drepte concurente formează patru unghiuri.		Definiție: Se numește diedru reuniunea a două semiplane care au aceeași frontieră. Frontiera se mai numește și <i>muchia diedrului</i> . Două plane secante formează patru diedre.	
Desenăm	Interpretăm	Desenăm	Interpretăm
	Unghiul AOB este format de semidreptele OA și OB , care au originea O comună.		Semiplanele marcate pe desen, determinate în planele α și β de dreapta d , formează un diedru

2. Ce înseamnă unghi plan corespunzător unui diedru?

Imaginile alăturate reprezintă poziția aceleiași uși în două momente diferite. Putem compara cele două poziții ale ușii, comparând unghiurile ABC_1 și ABC_2 .

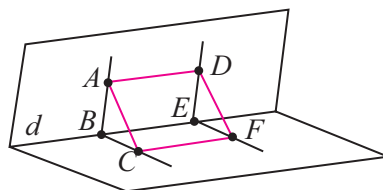


Definiție

Un **unghi plan corespunzător unui diedru** este un unghi format de două semidrepte conținute în fețele diedrului, care sunt perpendiculare pe muchia diedrului într-un punct al acesteia.

Teoremă Două unghiuri plane corespunzătoare unui diedru au aceeași măsură.

Demonstrație: Fie $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle DEF$ două unghiuri plane corespunzătoare unui diedru de muchie d . Alegem punctele A, C, D și F astfel încât $AB = DE$ și $BC = EF$. Deoarece AB și DE sunt coplanare, perpendiculare pe dreapta d , obținem că $ABED$ este un paralelogram. Analog, $BCFE$ este paralelogram. Aplicând teorema de tranzitivitate a relației de paralelism, din $AD \parallel BE$ și $CF \parallel BE$ obținem că $AD \parallel CF$. Cum $AD = BE = CF$ deducem că $ADFC$ este paralelogram, deci $AC = DF$. Rezultă că $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, deci $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$.

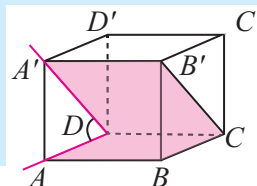


→ 3. Ce înseamnă măsura unui diedru?

Definiție

Măsura unui diedru este măsura unui unghi plan corespunzătoare diedrului.

Exemplu: În cubul $ABCD A'B'C'D'$ măsura diedrului determinat de dreptunghiurile $ABCD$ și $CDA'B'$ este măsura unghiului $A'DA$, deoarece acesta este un unghi plan corespunzător diedrului dat. De aceea, măsura diedrului este de 45° .

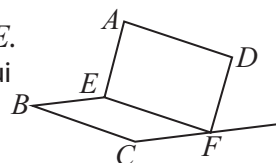


Exprimare orală

$\angle B'CB$ este un alt unghi plan corespunzător diedrului. Ce măsură are acesta?

Rezolvăm situația-problemă

Schematizăm monitorul cu dreptunghiul $AEFD$ și tastatura cu dreptunghiul $BCFE$. Atunci, pe frontiera EF avem $AE \perp EF$ cu AE inclusă în semiplanul dreptunghiului $AEFD$ și $BE \perp EF$ cu BE inclusă în semiplanul dreptunghiului $BCFE$. Măsura diedrului este egală cu măsura unghiului AEB .



Problemă rezolvată

În prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ notăm D mijlocul muchiei AB . Știm că $AB = 12$ cm și $AA' = 6$ cm. Calculează:

- măsura diedrului format de triunghiurile DCC' și BCC' ;
- măsura diedrului de muchie CD , ale cărei fețe mai conțin vârfurile A' , respectiv B' .

Rezolvare:

Cum redactăm?

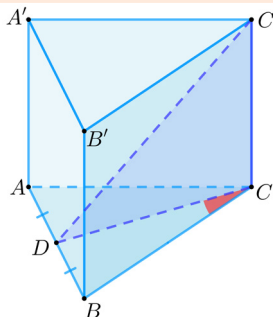
a) Muchia diedrului este CC' , deoarece punctele C și C' aparțin simultan planelor (DCC') și (BCC') . Deoarece $CC' \perp (ABC)$ și $CD \subset (ABC)$, deducem că $CC' \perp CD$. Analog, $BC \perp CC'$. Așadar, un unghi plan corespunzător diedrului din enunț este $\angle DCB$.

Acest unghi are măsura 30° , deoarece în $\triangle ABC$ echilateral, mediana CD este și bisectoarea unghiului BCA .

b) Demonstrăm mai întâi că $CD \perp (ABB'A')$. De aici va rezulta că $CD \perp DA'$ și $CD \perp DB'$, deci un unghi plan corespunzător diedrului dat este $\angle A'DB'$. Afirmatia de mai sus rezultă din următoarele două relații: $CD \perp AB$ (deoarece CD este mediană în triunghiul echilateral ABC); $CD \perp BB'$ (deoarece prisma este dreaptă).

Este necesar deci să calculăm măsura unghiului $A'DB'$.

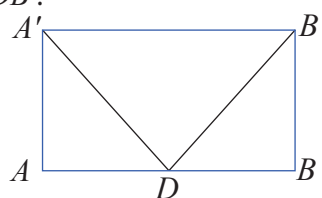
Conform datelor problemei, triunghiurile $A'DA$ și $B'DB$ sunt triunghiuri dreptunghice isoscele, deoarece $A'A = AD = DB = BB' = 6$ cm. Deducem că unghiurile $A'DA$ și $B'DB$ au măsura de 45° , deci unghiul diedru din enunț are măsura de 90° .



Cum gândim?

Identificăm două perpendiculare pe muchia diedrului, fiecare în câte una din cele două fețe.

Putem anticipa ce urmează să demonstrăm, pentru ca soluția dată să poată fi urmărită mai ușor!



Evaluăm nivelul de bază

$ABCD A'B'C'D'$ este cub. Ce măsură are diedrul determinat de pătratul $ABCD$ și dreptunghiul $D'ABC'$?

1. Adevărat sau fals? Măsura unui diedru este măsura oricărui unghi format de două semidrepte cu aceeași origine, incluse în fețele diedrului.

2. În cubul $ABCD A'B'C'D'$, calculează măsurile diedrelor determinate de:

- a) fețele $ABCD$ și $ABB'A'$;
- b) fața $ABCD$ și planul (ADB') ;
- c) planele (BDA) și (BDB') .

★★

5. Pătratele $ABCD$ și $ABEF$ determină un diedru cu măsura de 60° .

- a) Precizează un unghi plan corespunzător diedrului.
- b) Știind că $AB = 6$ cm, calculează CE .
- c) Determină măsura diedrului format de planele (ABC) și (ABE) .

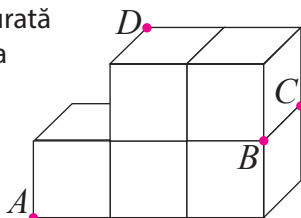
6. Calculează cosinusul și sinusul unghiului plan al diedrului format de două fețe ale unui tetraedru regulat.

★★★

8. $ABCD A'B'C'D'$ este prismă dreaptă cu $A'A = 4\sqrt{3}$ cm și baza pătrat cu $AB = 4$ cm. Calculează măsura diedrului determinat de:

- a) $(A'AD)$ și (ABC) ; b) $(A'BC)$ și (ABC) ;
- c) $(A'D'C)$ și $(A'D'D)$.

9. Corpul din figura alăturată este format prin lipirea a 5 cuburi identice. Calculează măsura diedrului determinat de planele (BCA) și (BCD) .



★★★★

12. $VABCD$ este piramidă patrulateră regulată cu O centrul bazei, $VO = 4\sqrt{3}$ cm și $AB = 8$ cm. Determină măsura diedrului format de planele (VBC) și (VAD) .

3. Alege răspunsul corect! În prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$, măsura diedrului determinat de planele $(AA'C)$ și $(AA'B)$ este: A) 90° ; B) 60° ; C) 45° ; D) 30° .

4. Desenează și notează piramida patrulateră regulată $SABCD$. Evidențiază pe desen unghiuri plane corespunzătoare diedrelor determinate de:

- a) planele (SAB) și (SBC) ;
- b) planele (ACS) și (ACB) .

7. Pe planul triunghiului echilateral ABC , cu $AB = 4$ cm, se ridică perpendiculara în A , pe care se ia punctul D cu $AD = 6$ cm.

- a) Arată că, dacă M este mijlocul lui BC , atunci $\angle DMA$ este un unghi plan corespunzător diedrului determinat de planele (BCA) și (BCD) .
- b) Calculează măsura diedrului determinat de planele (BCA) și (BCD) .
- c) Calculează măsura diedrului determinat de planele (ADB) și (ADC) .

10. Triunghiurile echilaterale ABC și ABD au latura AB comună, dar sunt incluse în plane diferite. Știm că $\angle CBD = 60^\circ$ și că $AB = 4$ cm. Află sinusul unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (ABC) și (BCD) .

11. În triunghiul ABC , decupat din hârtie, notăm M și N mijloacele laturilor AB și AC și $D = pr_{BC}(A)$. Îndoim triunghiul de-a lungul segmentului MN , până când distanța dintre A și D se înjumătățește față de situația inițială. Determină măsura diedrului astfel format.

13. Prisma dreaptă $ABCDEF$ are bazele triunghiuri echilaterale cu latura de 12 cm și diedrul determinat de planele (ABC) și (ABF) are măsura de 60° . Calculează CF .

A

$ABCD A'B'C'D'$ este cub. Calculează măsura diedrului dintre planele $(B'BCC')$ și $(A'BCD')$.

B

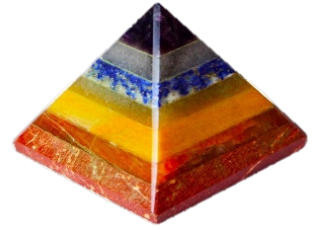
$ABCA'B'C'$ este prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral cu $AB = 6$ cm și $A'A = 3$ cm. Calculează măsura diedrului dintre planele $(A'BC)$ și (ABC) .

C

$ABCD A'B'C'D'$ este prismă dreaptă cu baza pătrat cu $AB = 4$ cm. Calculează lungimea înălțimii prisme dacă măsura diedrului dintre planele $(ABC'D')$ și $(ABCD)$ este de 60° .

► O situație-problemă

Din excursia din vacanța de vară, Geo a cumpărat un obiect din piatră, de forma unei piramide patrulateră regulate, cu toate muchiile de 6 cm. Cât de înclinate sunt între ele două fețe laterale alăturate?



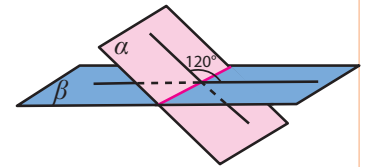
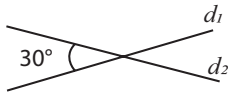
Vrem să știm! ►►

Cum determinăm măsura unghiului a două plane?

► Să comparăm

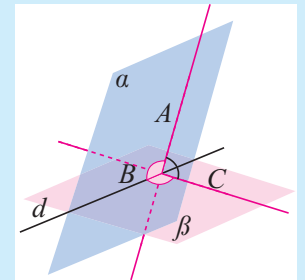
În plan	În spațiu
Două drepte concurente determină patru unghiuri, care au două câte două aceeași măsură. Măsura unghiului dintre două drepte concurente este cea mai mică dintre măsurile unghiurilor formate de aceste drepte.	Două plane secante determină patru diedre, care au două câte două aceeași măsură. Cum crezi că se poate defini măsura unghiului dintre două plane?

Exemple:



Definiție ►►

Măsura unghiului dintre două plane secante este cea mai mică dintre măsurile diedrelor formate. Măsura unghiului a două plane secante este egală cu măsura unghiului dintre două drepte perpendiculare pe dreapta de intersecție a planelor date.



i

În rezolvarea problemelor, redactăm astfel:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \cap \beta = d \\ AB \perp d, AB \subset \alpha \\ BC \perp d, BC \subset \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \sphericalangle(\alpha, \beta) = \sphericalangle(AB, BC) = \sphericalangle ABC.$$

► Rezolvăm situația-problemă

Notăm $SABCD$ piramida patrulateră regulată. Ne propunem să calculăm, de exemplu, unghiul dintre planele fețelor (SAB) și (SBC) .

Dacă M este mijlocul muchiei SB , atunci $AM \perp SB$ și $CM \perp SB$, deoarece triunghiurile SAB și SBC sunt echilaterale. Deducem că unghiul căutat este unghiul ascuțit format de dreptele AM și CM .

Aplicând Teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice ABC , AMB și BMC , obținem: $AC = 6\sqrt{2}$ cm; $AM = MC = 3\sqrt{3}$ cm.

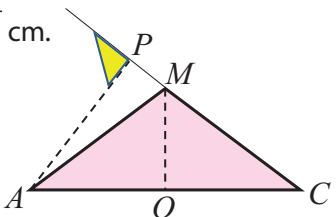
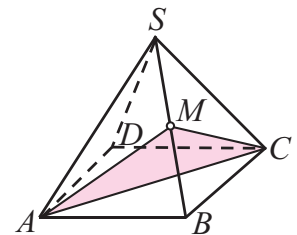
Deoarece $AM^2 + MC^2 = 54 < 72 = AC^2$, deducem că triunghiul isoscel AMC este obtuzunghic. De aceea, măsura unghiului dintre planele (SAB) și (SBC) este măsura unghiului (ascuțit) AMP , unde $AP \perp MC$, $P \in MC$.

Calculăm AP exprimând aria triunghiului AMC în două moduri:

$$A_{AMC} = \frac{AC \cdot MO}{2} = \frac{MC \cdot AP}{2}; \text{ după efectuarea calculelor, obținem: } AP = 2\sqrt{6} \text{ cm.}$$

$$\text{Putem calcula: } \sin(\sphericalangle AMP) = \frac{AP}{AM} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0,943.$$

De aceea, măsura unghiului dintre fețele SAB și SBC este de aproximativ 71° .



► Evaluăm nivelul de bază

$ABCD A'B'C'D'$ este cub. Află cosinusul unghiului dintre planele $D'AC$ și ABC .

●●●●▷ **Probleme propuse**

- ★
1. *Adevărat sau fals?* Măsura unghiului a două plane poate fi egală cu 135° .
 2. Diedrul determinat de triunghiurile ABC și DBC are măsura de 115° . Află măsura unghiului dintre planele (ABC) și (DBC) .
- ★★
5. Piramida lui Keops (Egipt) are forma unei piramide patrulateră regulate cu înălțimea de 147,75 m și latura bazei de 232 m. Calculează o valoare trigonometrică a unghiului format de planul unei fețe laterale cu planul bazei.
 6. Pe planul triunghiului echilateral LES cu $LE = 10$ cm se ridică o perpendiculară în L pe care se ia un punct A , astfel încât $AL = 5$ cm. Calculează măsura unghiului dintre planele (AES) și (LES) .
 7. Pe planul dreptunghiului $REPT$, cu $RE = 6\sqrt{3}$ cm și $RT = 6$ cm se ridică o perpendiculară în R pe care se ia un punct D , astfel încât $DR = 6$ cm. Calculează măsura unghiurilor dintre planele (PED) și (PER) , respectiv, dintre planele (PTD) și (PTR) .
 8. În piramida patrulateră regulată $VABCD$, înălțimea VO are lungimea 8 cm. Află lungimea muchiei laterale, știind că măsura unghiului dintre planele (VAB) și (ABC) este egală cu:
a) 30° b) 45° c) 60° .
- ★★★
9. TA este o dreaptă tangentă la cercul de centru O și rază $OA = 9$ cm. Pe perpendiculară în O pe planul cercului se ia un punct V , $VO = 3\sqrt{3}$ cm. Află măsura unghiului dintre planele (VAT) și (OAT) .
 10. **Investigație.** Conform legii, înclinația rampelor de acces pentru persoane cu dizabilități trebuie să fie de (aproximativ) 5%; aceasta înseamnă că tangenta unghiului format de planul rampei cu planul orizontal al solului este 0,05. Verifică pentru cel puțin trei rampe dacă acestea se încadrează în recomandările legale. Notează datele într-un tabel, specificând și metodele folosite pentru determinarea înclinației.
 11. În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$, $AD = 6$ cm, unghiul dintre planele (BCD) și $(B'CD)$ are 60° , iar cel dintre planele $(A'BC)$ și (ABC) are 30° . Calculează perimetrul triunghiului ACD' .
 12. $ABCD A'B'C'D'$ este prismă dreaptă cu $A'A = \sqrt{6}$ dm și baza pătrat cu $AB = 6$ dm. Calculează $\sphericalangle[(A'BD), (C'BD)]$.
 13. Considerăm tetraedrul $ABCD$, tridreptunghic în A : aceasta înseamnă că toate unghiurile BAC , CAD , BAD sunt unghiuri drepte. Știind că $AB = AC = AD$, determină și calculează (sau aproximează) unghiul planelor: a) (ABC) și (ADC) ; b) (ABC) și (ADB) ; c) (ABC) și (BCD) ; d) (ABD) și (BCD) ; e) (ADC) și (BDC) .
- ★★★★
14. Demonstrează că, în cubul $ABCDEFGH$, planul (AFC) face unghiuri de măsuri egale cu toate planele fețelor cubului. Determină un alt plan, ce conține trei vârfuri ale cubului și are aceeași proprietate.
 15. În tetraedrul $ABCD$, măsura diedrului format de fețele ABC și ABD este de 110° . Fie CN și DM înălțimile din C , respectiv D ale tetraedrului. Calculează măsura unghiului dintre dreptele CN și DM .

●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A

$ABCD A'B'C'D'$ este un cub. Determină $\sphericalangle[(C'CB), (D'BC)]$.

B

$ABCA'B'C'$ este prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral cu $AB = 8$ cm și $A'A = 4$ cm. Determină $\sphericalangle[(B'AC), (ABC)]$.

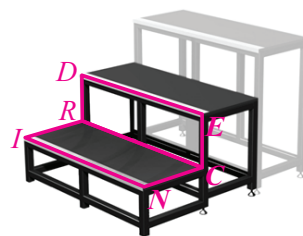
C

$ABCD A'B'C'D'$ este prismă dreaptă cu baza pătrat cu $AB = 6$ cm și $A'A = 3\sqrt{2}$ cm. Determină $\sphericalangle[(A'BD), (DBC)]$.

Lecția 10 Plane perpendiculare

O situație-problemă

Figura alăturată reprezintă schematic o scenă în aer liber a unui teatru. Dreptunghiul $DECR$ reprezintă un decor ancorat de doi stâlpi DR și EC , iar dreptunghiul $CRIN$ reprezintă scena propriu-zisă. Știind că $RI = 10$ m, iar unghiul DRI este drept. Care este poziția decorului față de planul scenei? Ce distanță este de la centrul scenei la decor?



Vrem să știm! Ce sunt planele perpendiculare?

1. Cum definim planele perpendiculare?

Să comparăm

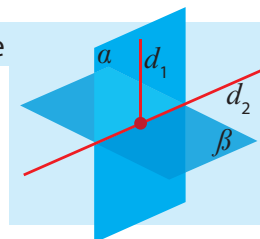
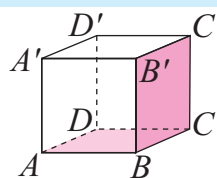
În plan	În spațiu
Două drepte concurente formează patru unghiuri. Dacă două drepte formează un unghi cu măsura de 90° , atunci oricare dintre celelalte unghiuri formate are măsura de 90° .	Două plane secante formează patru diedre. Dacă două plane formează un diedru cu măsura de 90° , atunci oricare dintre celelalte diedre formate de plane are măsura de 90° .

Definiție

Planele α și β sunt perpendiculare dacă unul dintre diedrele determinate de ele are măsura de 90° . Notăm: $\alpha \perp \beta$

Exemplu:

În cubul $ABCD A' B' C' D'$, $(ABC) \perp (CBB')$ pentru că măsura unui diedru format de aceste plane este de 90° .



2. Cum putem demonstra că două plane sunt perpendiculare?

Teorema 1. Dacă un plan α conține o dreaptă a perpendiculară pe un plan β atunci cele două plane sunt perpendiculare.

Formulăm	Reprezentăm	Demonstrăm
Ipoteza: $a \perp \beta$ $a \subset \alpha$ Concluzia: $\alpha \perp \beta$		Notăm $d = \alpha \cap \beta$ dreapta de intersecția a celor două plane și $\{P\} = a \cap \beta$ punctul de intersecție dintre dreapta a și planul β. Construim dreapta b cu proprietățile: $b \subset \beta$, $b \perp d$, $P \in b$. Deoarece $a \perp \beta$ și $b \subset \beta$, $d \subset \beta$, deducem că $a \perp b$ și $a \perp d$. Din modul de construcție, unghiul dintre planele α și β este unghiul dintre dreptele a și b, adică 90°. În concluzie: $\alpha \perp \beta$.

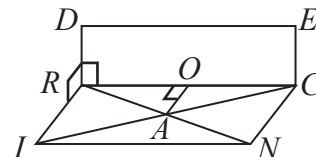
Citește demonstrația teoremei anterioare. Unde am folosit faptul că $a \subset \alpha$?

Gândim critic și constructiv!

Rezolvăm situația-problemă

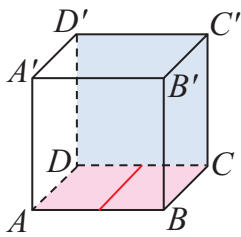
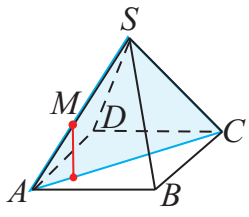
Pașii principali de rezolvare sunt:

1. Arătăm că $DR \perp (CRI)$ și, cum $DR \subset (DRC) \Rightarrow (DRC) \perp (CRI)$;
2. Fie A centrul dreptunghiului $CRIN$ și O proiecția lui A pe RC . Arătăm că AO este linie mijlocie în $\triangle RNC$. Rezultă $AO = 5$ cm.



➔ 3. Ce proprietăți au planele perpendiculare?

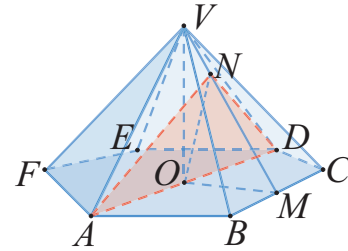


Enunțăm	Redactăm	Aplicăm
Teorema 2. Dacă două plane secante α și β sunt perpendiculare, atunci orice dreaptă inclusă într-unul din ele perpendiculară pe dreapta lor de intersecție, este perpendiculară pe celălalt plan.	$\left. \begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ \alpha \cap \beta = b \\ a \subset \alpha \\ a \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp \beta$	În cubul $ABCD A'B'C'D'$, planele (ABC) și (CDC') sunt perpendiculare, iar dreapta d ce unește mijloacele muchiilor AB și CD este perpendiculară pe CD. Deci: $d \perp (DCC')$. 
Teorema 3. Dacă două plane α și β și sunt perpendiculare, atunci proiecția pe unul dintre plane a oricărui punct din celălalt plan aparține dreptei de intersecție a celor două plane.	$\left. \begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ \alpha \cap \beta = b \\ A \in \alpha \\ pr_{\beta} A = A' \end{array} \right\} \Rightarrow A' \in b$	În piramida patrulateră regulată $SABCD$, planele (SAC) și (ABC) sunt perpendiculare. Dacă $M \in SA$, atunci $pr_{(ABC)}(M) \in AC$. 

●●●● ▶ Problemă rezolvată

În piramida hexagonală regulată $VABCDEF$, având $AB = 12$ cm și înălțimea $VO = 6$ cm, notăm M mijlocul muchiei BC ,

iar pe apotema VM luăm punctul N astfel încât $VN = \frac{VM}{4}$. Arată că $(ADN) \perp (VBC)$.



Rezolvare:

Cum redactăm

Cum gândim

Vom arăta că $ON \perp (VBC)$.

Aplicând Teorema lui Pitagora în $\triangle VMO$, în care $OM = 6\sqrt{3}$ cm și $VO = 6$ cm, obținem $VM = 12$ cm.

Deducem că $VN = 3$ cm și $MN = 9$ cm.

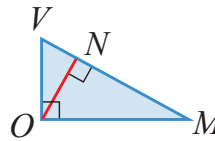
Se verifică ușor egalitatea $\frac{NM}{OM} = \frac{OM}{VM}$, din care rezultă

că $\triangle NOM$ și $\triangle OVM$ sunt asemenea (conform criteriului de asemănare LUL). Astfel, obținem că $\sphericalangle ONM = \sphericalangle VOM = 90^\circ$, așadar $ON \perp VM$ (1).

Pe de altă parte, $BC \perp OM$ și $BC \perp VM$, deci $BC \perp (VOM)$ și cum $ON \subset (VOM)$, obținem $BC \perp ON$ (2).

Din relațiile (1) și (2) deducem că $ON \perp (VBC)$.

Deoarece $ON \subset (ADN)$, rezultă că $(ADN) \perp (VBC)$.



Enunțăm de la început strategia de rezolvare: găsim o dreaptă situată în unul din cele două plane, perpendiculară pe celălalt plan.

Găsește o metodă diferită de cea prezentată, pentru a dovedi că $ON \perp VM$.

Gândim critic și constructiv!

●●●● ▶ Evaluăm nivelul de bază

1. $ABCD A'B'C'D'$ este cub. Arată că $(A'AB) \perp (ABC)$.

2. $VABC$ este piramidă triunghiulară regulată cu $VO \perp (ABC)$. Arătați că $(VOA) \perp (ABC)$.

●●●●▷ **Probleme propuse**

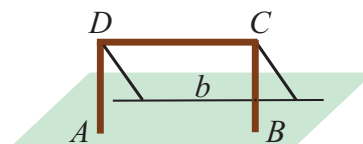
- ★
- Proiecția triunghiului ABC pe un plan este triunghiul DBC . În triunghiul DBC , BE este înălțime cu $E \neq D$. Demonstrează că:
 - $(ABD) \perp (DBC)$;
 - $(ADC) \perp (DBC)$;
 - $BE \perp (ADC)$.
 - Triunghiul ABC este echilateral, iar $M \in BC$ astfel încât $\sphericalangle BAM = 30^\circ$. Fie $SA \perp (ABC)$. Demonstrează că:
 - $(SAB) \perp (ABC)$;
 - $(SAC) \perp (ABC)$;
 - $(SAM) \perp (ABC)$;
 - $(SAM) \perp (SBC)$.
- ★★
- VO este înălțimea unui con circular drept a cărui secțiune axială este triunghiul VAB , iar CB este tangentă la cerc. Demonstrează că:
 - $(VAB) \perp (ABC)$;
 - $(VOC) \perp (ABC)$.
 - Pe planul pătratului $UNIC$ se ridică o perpendiculară în U pe care se ia un punct B . Demonstrează că:
 - $(BUN) \perp (UNI)$;
 - $(BUI) \perp (UNI)$;
 - $(BNI) \perp (BUN)$.
 - $ABCD$ este tetraedru cu $AB = AC = DB = DC$, iar M este mijlocul muchiei BC . Demonstrează că $(ABC) \perp (AMD)$.
 - Pe planul dreptunghiului $REPT$ se ridică o perpendiculară în R pe care se ia un punct $D \neq R$. Demonstrează că:
 - $(DRE) \perp (PER)$;
 - $(DRP) \perp (PER)$;
 - $(DEP) \perp (DRE)$;
 - $(DPT) \perp (DRT)$.
- ★★★
- $ABCA'B'C'D'$ este cub cu $AB = 10$ cm, iar E, F sunt mijloacele segmentelor $A'D$, respectiv, $D'B$. Fie $O = pr_{(ABC)} F$.
 - Demonstrează că $(EFO) \perp (ABC)$ și calculează $d[F, (ABC)]$.
 - Demonstrează că $(EFO) \perp (B'BC)$ și calculează $d[(EFO), (A'B'B)]$.
 - $ABCA'B'C'$ este prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral cu $AC = 4$ cm. Fie M mijlocul muchiei AC și P centrul feței $BB'C'C$. Știind că $\sphericalangle[C'A, (ABC)] = 60^\circ$, arată că $(BMC') \perp (A'AC)$ și calculează distanța de la P la planele (ABC) , respectiv, $(A'AC)$.
 - În cubul $ALGEBRIC$, fie M mijlocul muchiei LR . Demonstrează că $(ACG) \perp (AMG)$.
 - Hexagonul regulat $ABCDEF$, decupat din hârtie, se îndoaie după dreapta FC astfel încât planele (ABC) și (DCE) devin perpendiculare. Dacă $AB = 12$ cm, calculează lungimea segmentului AD , după îndoire.
 - În piramida patrulateră regulată $VABCD$, determină raportul între muchia bazei și înălțimea piramidei, astfel ca $(VAB) \perp (VCD)$.
 - În piramida triunghiulară regulată $VABC$, determină raportul între muchia laterală și muchia bazei, astfel ca $(VAB) \perp (VAC)$.

●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

- | | | |
|---|---|---|
| <p>A</p> <p>$ABCA'B'C'D'$ este cub. Demonstrează că $(C'BD) \perp (A'AC)$.</p> | <p>B</p> <p>$VABC$ este piramidă triunghiulară regulată cu $VO \perp (ABC)$. Demonstrează că $(VBC) \perp (VOA)$.</p> | <p>C</p> <p>$VABCD$ este piramidă patrulateră regulată. Demonstrează că $(VBD) \perp (VAC)$.</p> |
|---|---|---|

●●●●▷ O situație-problemă

O școală a cumpărat două porți de handbal pentru terenul de sport, cu înălțimea $AD = BC = 2$ m și lățimea $CD = 3$ m. Pentru siguranța elevilor, fiecare poartă este ancorată de câte o bară metalică, b , situată în spatele porților la distanța de 1 m de A și B . Conducerea școlii a hotărât să încastreze bara b în beton și să unească cu b vârfurile C și D ale porții, prin bare de lungime minimă. La un depozit s-au găsit bare metalice cu lungimea totală de 10 m. Este oare suficient material pentru cele patru bare de siguranță?



Vrem să știm! >>>

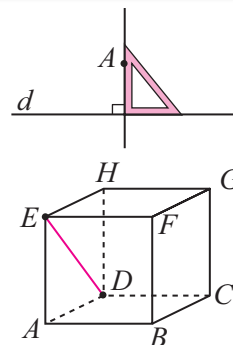
Cum putem calcula distanța de la un punct la o dreaptă?

●●●●▷ Să ne amintim

În plan putem construi perpendiculara pe o dreaptă cu ajutorul echerului, dar reprezentările plane ale corpurilor geometrice nu păstrează măsura unghiurilor. Ca urmare, nu putem verifica dacă două drepte din spațiu sunt perpendiculare folosind echerul pe o reprezentare plană a lor.

Exemplu: Pe reprezentarea plană a cubului $ABCDEFGH$, unghiul EDC nu pare să fie drept, deși $ED \perp DC$.

În cazul corpurilor geometrice avem nevoie de reguli specifice pentru a identifica drepte perpendiculare.

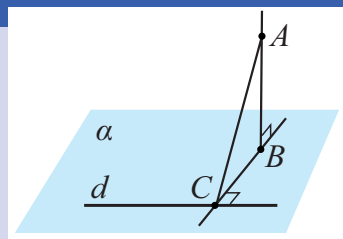


●●●●▷ Enunțăm și demonstrăm

Teorema celor trei perpendiculare

Dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan și din piciorul ei ducem o perpendiculară pe o dreaptă dată din acel plan, atunci dreapta determinată de un punct al perpendicularei pe plan și de intersecția celor două drepte din plan este perpendiculară pe dreapta dată din plan.

Altfel spus: Fie planul α , dreapta d inclusă în α și punctul A exterior lui α . Dacă $AB \perp \alpha$, $BC \perp d$ și $BC \subset \alpha$, $d \subset \alpha$, atunci $AC \perp d$.



Demonstrație

Deoarece $AB \perp \alpha$ și $d \subset \alpha$ deducem că $d \perp AB$. Cum $d \perp BC$ și $d \perp AB$, deducem că $d \perp (ABC)$, deoarece d este perpendiculară pe două drepte concurente din planul (ABC) . Rezultă că $AC \perp d$.

●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

Dacă DE și CF sunt bare de lungimi minime, atunci $DE \perp b$ și $DF \perp b$. Trebuie deci să identificăm distanțele de la punctele C și D la dreapta b . Pentru aceasta, folosim *Teorema celor trei perpendiculare*.

Construim $AE \perp b$, $E \in b$ și $BF \perp b$, $F \in b$. Atunci:

$$\left. \begin{array}{l} DA \perp (ABE) \\ AE \perp b \\ AE, b \subset (ABE) \end{array} \right\} \Rightarrow DE \perp b \Rightarrow d(D, b) = DE.$$

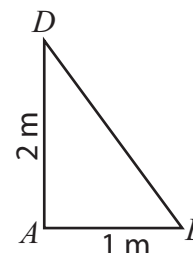
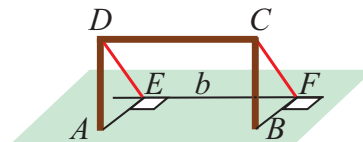
Analog, $d(C, b) = CF$.

Calculăm lungimea segmentului DE din triunghiul dreptunghic DAE (în care $\angle A = 90^\circ$):

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 = 5, \text{ deci } DE = \sqrt{5} \text{ m.}$$

În total, cele patru bare de ancorare a porților au lungimea de $4\sqrt{5}$ m.

Cum $4\sqrt{5} = \sqrt{80} < \sqrt{100} = 10$, deducem că este suficient material pentru realizarea barelor de siguranță.



Aplicând teorema celor trei perpendiculare, arată că $CF \perp b$. Care este măsura unghiului dintre DE și planul ABE ?

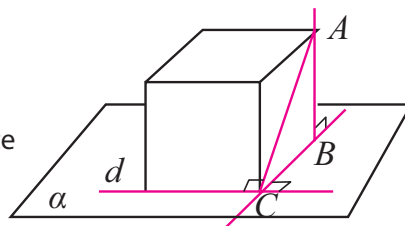
Gândim critic și constructiv!

●●●●▷ Evaluăm nivelul de bază

1. $ABCD A'B'C'D'$ este cub cu $AC \cap BD = \{O\}$. Demonstrează că $D'O \perp AC$.
2. $ABCD$ este tetraedru regulat cu $AO \perp (BCD)$, iar OM este apotema triunghiului BCD , cu $M \in BC$. Demonstrează că $AM \perp BC$.

●●●●▷ Exprimare orală

Observă asemănarea dintre poziția dreptelor din figura folosită în demonstrația teoremei și dreptele marcate pe paralelipipedul dreptunghic reprezentat alăturat. De ce crezi că teorema se numește „teorema celor trei perpendiculare”?



●●●●▷ Să comparăm

Ana și Geo au primit ca temă problema:

„Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara AM . Știind că $AB = 6$, $AD = 8$, $AM = 6$, calcuți distanța de la M la BD ”.

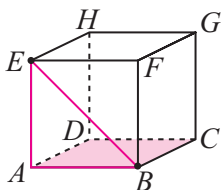
Compară rezolvările lor. Sunt ambele corecte? Care este mai simplă?

Rezolvarea Anei	Rezolvarea lui Geo
Fie $AN \perp BD$, $N \in [BD]$. $\left. \begin{array}{l} MA \perp (ABC) \\ AN \perp BD \\ AN \subset (ABC) \\ BD \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow MN \perp BD \Rightarrow d(M; BD) = MN$ Din $\triangle ABD$ cu $\sphericalangle A = 90^\circ$ obținem: $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 10$ $AN = \frac{AB \cdot AD}{BD} = 4,8$ Din $\triangle MAN$ cu $\sphericalangle A = 90^\circ$ obținem: $MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = \sqrt{59,04}$ Deci: $d(M; BD) = \sqrt{59,04} \approx 7,68$	Folosind triunghiurile dreptunghice ABD, MAB și MAD, obținem: $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 10$ $MB = \sqrt{AM^2 + AB^2} = 6\sqrt{2}$ $MD = \sqrt{AM^2 + AD^2} = 10$ Observăm că triunghiul MBD este isoscel. Construim înălțimile DE și MF. Vom calcula MF exprimând în două moduri aria triunghiului MBD. $ME = EB = 3\sqrt{2} \Rightarrow DE = \sqrt{MD^2 - ME^2} = \sqrt{82}$ Deoarece: $A_{MBD} = \frac{DE \cdot MB}{2} = \frac{MF \cdot BD}{2}$ Obținem: $d(M; BD) = MF = \frac{DE \cdot MB}{BD} = \frac{6\sqrt{41}}{5} \approx 7,68$

●●●●▷ **Probleme propuse**

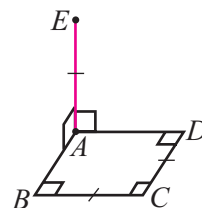
1. Observă figura și arată că $EB \perp BC$, completând schema:

$EA \perp \square$
 $AB \perp \square$
 $\square \subset \square$
 $\Rightarrow EB \perp BC.$



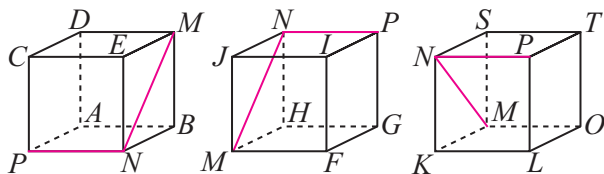
2. Pe planul triunghiului echilateral ARS , cu I mijlocul laturii RS , se ridică o perpendiculară în A , pe care se ia un punct $P \neq A$. Demonstrează că $PI \perp RS$.

3. Transpune în notații matematice convențiile marcate pe figura alăturată, apoi determină picioarele perpendicularelor din E pe dreptele AB, BC, CD și BD .



4. Alege răspunsul corect!
În cubul $ABCDEFGH$, piciorul perpendicului din H pe AC coincide cu punctul de intersecție a dreptei AC cu dreapta:
A) AB ; B) BC ; C) GC ; D) BD .

5. Pentru fiecare din cuburile din figurile de mai jos, determină un plan și o perpendiculară pe acesta cu ajutorul cărora poți demonstra că $MN \perp NP$, aplicând teorema celor trei perpendiculare. Scrie schema demonstrației.



6. Proiecția triunghiului ACD pe un plan este triunghiul BCD dreptunghic în C . Arată că triunghiului ACD este dreptunghic.
7. Pe planul pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara în A , pe care se consideră un punct E . Știm că $AB = 4$ cm, $AE = 3$ cm.
a) Calculează EB, EC și ED .
b) Demonstrează că $EB \perp BC$ și $ED \perp DC$.
c) Determină perpendiculara din E pe BD .
d) Calculează aria triunghiului EBD .

8. Pătratele $ABCD$ și $ABEF$ sunt incluse în plane perpendiculare și $AB = 2$ cm.

- a) Demonstrează că $AD \perp (ABE)$.
b) Calculează distanța de la C la AE .

9. $ABCD A'B'C'D'$ este prismă dreaptă cu baza pătrat cu $AB = 6$ cm și $\angle[(A'BC), (ABC)] = 30^\circ$. Calculează: a) $d(D', AB)$ b) $d(D', AC)$ c) aria triunghiului $D'AC$.

10. Paralelipipedul $ABCDEFGH$ are $AB = 6$ cm, $AD = 2$ cm, $AE = 3$ cm.

- a) Justifică în două moduri că $AB \perp BG$.
b) Calculează $AC, AG, d(H; AC)$ și $d(A; CF)$.

11. $VABCDEF$ este piramidă hexagonală regulată, cu O centrul bazei, $AB = VO = 10$ cm. Calculează: a) $d(V, AB)$ b) $\angle[VA, (ABC)]$ c) $d[A, (VBE)]$.

12. În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$, avem $AA' = d(A, BD)$. Demonstrează că orice punct M al segmentului $B'C'$ este egal depărtat de dreptele BD și $A'C'$.

13. $ABB'A'$ este secțiunea axială a unui cilindru circular drept cu $G = 8$ cm și $AB = 12$ cm. C este un punct situat pe arcul AB , astfel încât măsura unghiului la centru AOC este egală cu 60° . Calculează distanța de la A' la BC .

●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A

$ABCD A'B'C'D'$ este cub cu $AB = 8$ dm. Calculează $d(B', AC)$.

B

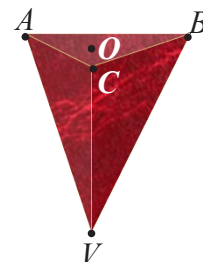
$VABC$ este piramidă cu O centrul bazei, $VO = 4$ dm și $AB = 24$ dm. Calculează $d(V; AB)$.

C

$ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ este prismă dreaptă cu baza hexagon regulat cu $AB = AA' = 4$ cm. Calculează $d(B'; CF)$.

O situație-problemă

Un bijutier a realizat un medalion din rubin, având forma unui corp $VABC$, având fața ABC triunghi echilateral cu centrul O , iar celelalte fețe triunghiuri isoscele cu vârful V . Distanța de la V la fața ABC este $VO = 20$ mm, iar distanța de la O la BC este 15 mm. Trebuie făcut un "canal" drept și subțire prin O . Care este cea mai mică lungime posibilă a acestuia?



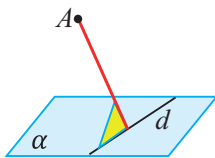
Vrem să știm! Cum calculăm diferite distanțe în spațiu?

1. Ce tipuri de distanțe calculăm în spațiu?

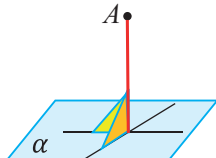
Să observăm!

Comparativ cu geometria plană, în geometria în spațiu au apărut următoarele distanțe:

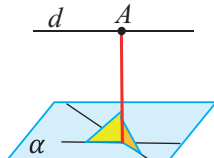
Distanța de la un punct la o dreaptă



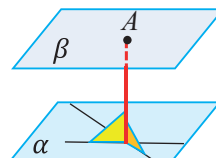
Distanța de la un punct la un plan



Distanța de la o dreaptă la un plan paralel cu ea



Distanța dintre două plane paralele.



În toate aceste situații, este necesar să construim perpendiculare dintr-un punct pe o dreaptă.

2. Care sunt reciprocele teoremei celor trei perpendiculare?

Să analizăm!

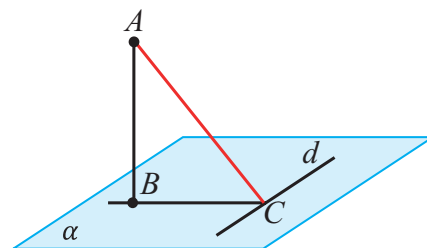
În Teorema celor trei perpendiculare apar: planul α , dreapta d , $d \subset \alpha$ și punctele A, B, C , astfel încât $A \notin \alpha$, $B \in \alpha$, $B \notin d$, $C \in d$.

Teorema se poate redacta astfel:

$$\left. \begin{array}{l} (1) AB \perp \alpha \\ (2) BC \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp d$$

Observăm că în teorema celor trei perpendiculare apar două condiții.

De aceea, teorema celor trei perpendiculare are două reciproce.



Prima reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare

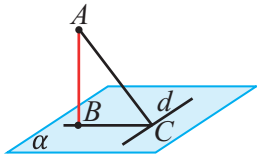
Dacă dintr-un punct A exterior planului α se construiește dreapta AB perpendiculară pe planul α și o dreaptă AC perpendiculară pe o dreaptă d inclusă în α și $B \neq C$, atunci dreapta BC este perpendiculară pe d .

Redactăm	Reprezentăm	Demonstrăm
$\left. \begin{array}{l} AB \perp \alpha \\ AC \perp d \\ BC \subset \alpha \\ d \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp d$		Deoarece $AB \perp \alpha$ și $d \subset \alpha \Rightarrow AB \perp d \Leftrightarrow d \perp AB$. Cum $d \perp AB, d \perp AC, AB \cap AC = \{A\} \Rightarrow d \perp (ABC)$. Din $d \perp (ABC), BC \subset (ABC) \Rightarrow d \perp BC \Leftrightarrow BC \perp d$.

Aplicație. În tetraedrul $ABCD$, $AB \perp (BCD)$ și $AD \perp CD$, atunci $BD \perp CD$. Altfel spus, în condițiile date, toate fețele tetraedrului sunt triunghiuri dreptunghice.

A doua reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare

Dacă într-un punct C al unei drepte d inclusă într-un plan α se construiesc două perpendiculare BC inclusă în α și AC neinclusă în α , astfel încât AB este perpendiculară pe BC , atunci dreapta AB este perpendiculară pe α .

Redactăm	Reprezentăm	Demonstrăm
$\left. \begin{array}{l} AB \perp BC \\ BC \perp d \\ AC \perp d \\ BC \subset \alpha \\ d \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp \alpha$		Deoarece $d \perp BC$, $d \perp AC$, $\square$, $\Rightarrow d \perp (ABC)$. Din $d \perp (ABC)$, $\square \Rightarrow d \perp AB$. $AB \perp BC$ și $\square$, $BC \cap d = \{C\} \Rightarrow AB \perp \alpha$.

Transcrie demonstrația și completează detaliile care lipsesc în locurile marcate cu $\square$.

Gândim critic și constructiv!

●●●▶ Rezolvăm situația-problemă

Cel mai scurt canal este un segment cu un capăt în O , perpendicular pe o față laterală a piramidei, de exemplu pe (VBC) .

Notăm M mijlocul lui BC . Trasăm $OH \perp VM$ și vom arăta că $OH \perp (VBC)$, prin două metode.

Metoda I

Arătăm că OH este perpendiculară pe două drepte concurente din (VBC) .

Deoarece $BC \perp AM$ și $BC \perp VM$, iar $AM \cap VM = \{M\} \Rightarrow BC \perp (VOM)$.

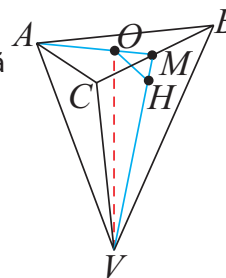
Dar, deoarece $OH \subset (VOM)$, deducem că $BC \perp OH$, echivalent cu $OH \perp BC$.

Având și $OH \perp VM$, iar $BC \cap VM = \{M\}$, obținem că $OH \perp (VBC)$.

Metoda II

Vom folosi a doua reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare.

Deoarece $OH \perp VM$, $OM \perp BC$, $VM \perp BC$, iar $BC \subset (VBC)$, din a doua reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare se deduce că $OH \perp (VBC)$.



Indiferent de metoda de demonstrație, calcularea distanței OH folosește faptul că acest segment este înălțimea din O a triunghiului dreptunghic VOM .

Din teorema lui Pitagora obținem $VM = 25$ mm, de unde $OH = \frac{c_1 \cdot c_2}{ip} = \frac{OM \cdot OV}{VM} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12$ mm.

Compară cele două metode de rezolvare a situației-problemă. Care dintre acestea ți se pare mai simplă? De ce?

Gândim critic și constructiv!

●●●▶ Evaluăm nivelul de bază

- $ABCD A'B'C'D'$ este cub cu $AB = 20$ cm. Calculează distanța de la C' la AD și distanța de la punctul C la planul $C'AD$.
- $ABCD$ este tetraedru regulat cu $AO \perp (BCD)$ și $BC = 24$ cm. Calculează distanța de la punctul O la planul ACD .



●●●●▷ **Probleme propuse**

★

1. Dreptunghiul $ABCD$, cu $AB = 24$ cm și $AD = 12$ cm și triunghiul echilateral ABE sunt incluse în plane perpendiculare. Calculează:
a) distanța de la punctul C la planul (ABE) și distanța de la punctul E la planul (DAB) ;
b) distanța de la punctul C la dreapta AE și distanța de la punctul B la planul (ACE) .
2. Pe planul pătratului $ABCD$, cu $AB = 18$ cm, construim $SA \perp (ABC)$ astfel încât $SA = 18\sqrt{3}$ cm. Punctul M este mijlocul segmentului SC . Calculează:
a) distanța de la punctul S la dreapta BC ;
b) distanța de la punctul A la planul (SBC) ;
c) distanțele de la M la dreptele AB , CD , BC și AD .

★★

3. $ABCD A'B'C'D'$ este cub cu $AB = 14$ cm. Calculează:
a) distanța de la punctul D' la dreapta AB ;
b) distanța de la punctul D la planul $(D'AB)$.
4. VAB este secțiunea axială a unui con circular drept cu $VA = 15$ cm și $AB = 24$ cm. Pe cerc se ia un punct C , astfel încât unghiul la centru BOC are măsura egală cu 60° . Calculează:
a) distanța de la punctul V la planul (ABC) ;
b) distanța de la punctul V la dreapta BC .
5. Trapezul $ABCD$ are laturile $AB = AD = DC = a$ și $BC = 2a$. În punctul A se ridică o perpendiculară pe planul trapezului pe care se ia segmentul $AE = 3a$. Calculează distanțele de la E la laturile și la diagonalele trapezului.
6. Paralelogramul $ABCD$ are aria de 15 cm^2 și laturile de 5 cm și 10 cm. În vârful A se ridică o perpendiculară pe planul său, pe care luăm punctul M astfel încât $AM = 2$ cm. Calculează distanțele de la M la laturile și diagonalele paralelogramului.

i

★★★

7. Triunghiul ABC are laturile $AB = AC = 3$ cm, $BC = 4$ cm. Fie $MA \perp (ABC)$ și $AM = 2$ cm.
a) Calculează MB și MC , apoi verifică dacă triunghiul MBC este dreptunghic.
b) Calculează distanțele de la M la BC și la mediana din B a triunghiului ABC .
c) Determină poziția punctului $N \in AM$ astfel încât triunghiul BNC să fie echilateral.
d) Calculează cosinusul unghiului dintre dreptele BM și AC .
8. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$, $AB = 10$, $BC = 6$, $AE = 8$. Determină distanța de la punctul F la dreapta AH .
9. Fie dreptunghiul $ABCD$. De aceeași parte a planului său se duc perpendicularele AA' , BB' , CC' , DD' pe acest plan, astfel încât $AA' \equiv BB' \equiv CC' \equiv DD' \equiv AI$, unde I este piciorul perpendicularei din A pe BD . Arată că orice punct al segmentului $B'C$ este egal depărtat de dreptele BD și $A'C'$.

★★★★

10. Fie triunghiul OBC și dreapta AO perpendiculară pe planul său. Fie H și H_1 respectiv ortocentrele triunghiurilor ABC și OBC , AD și BE înălțimi în triunghiul ABC , BE_1 înălțime în triunghiul OBC . Demonstrează că:

a) $E_1E \perp AC$; **b)** dreapta HH_1 este perpendiculară pe (ABC) ; **c)** $\frac{OA}{AD} \cdot \frac{DH_1}{H_1B} \cdot \frac{BE}{EE_1} = 1$.

●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A

Pe planul pătratului $ABCD$ cu latura de 6 cm se ridică perpendiculara $AM = 3$ cm. Calculează distanța de la punctul M la BD .

B

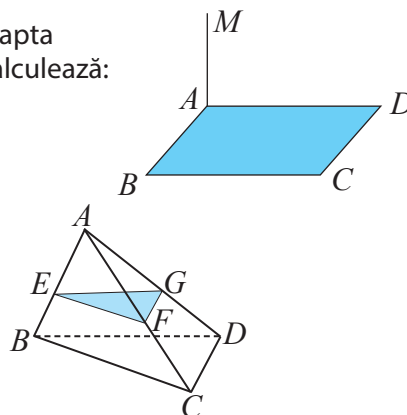
Pe planul hexagonului regulat $ABCDEF$ cu latura $AB = 4$ cm, se ridică o perpendiculară în punctul A pe care se ia segmentul $AM = 3$ cm. Calculează distanța de la M la BC .

C

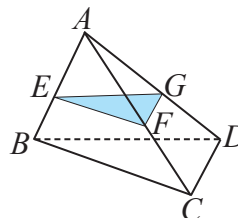
$ABCD$ este tetraedru regulat cu înălțimea $AO = 4\sqrt{6}$ cm. Calculează distanța de la punctul O la planul (ABC) .

1. În figura alăturată, $ABCD$ este un pătrat cu latura de 20 cm, iar dreapta MA este perpendiculară pe planul pătratului. Dacă $MA = 15$ cm, calculează:

- distanța de la M la AB ;
- distanța de la M la DC ;
- distanța de la M la BD .



2. În figura alăturată, punctele E, F, G sunt mijloacele muchiilor tetraedrului regulat $ABCD$. Arată că planele (EFG) și (BCD) sunt paralele și calculează distanța dintre ele, știind că $AB = 6$ cm.

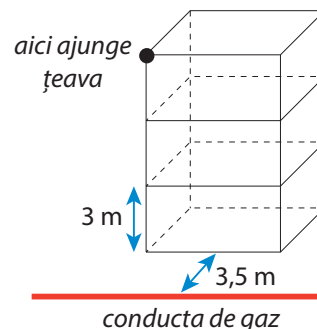


3. Un pătrat cu latura de 12 cm este confecționat din hârtie. Îndoim pătratul de-a lungul unei diagonale, până când cele două părți devin perpendiculare. Calculează distanța dintre vârfurile diagonale opuse, care nu mai sunt coplanare după îndoire.

4. Două cutii paralelipipedice din carton sunt așezate una peste alta, ca în figura alăturată. Demonstrează că cele două drepte marcate pe figură, determinate de muchii laterale ale cutiilor, sunt coplanare.

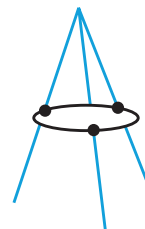


5. Din țeava de alimentare cu gaze a străzii lui Mati trebuie realizată o deviație, ce urmează să ajungă la etajul 2 al unui bloc nou construit. Țevile deviației trebuie să fie poziționate de-a lungul pereților și pe sol, iar pentru micșorarea costurilor, acestea trebuie să fie de lungime minim posibilă. Observă schița alăturată, apoi trasează noua conductă. Ce lungime va avea aceasta?



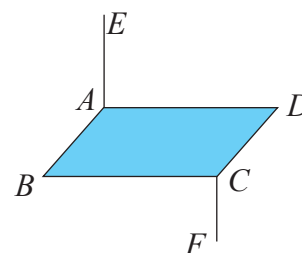
6. Un trepied este construit din 3 bare identice, prinse între ele la un capăt. Pentru stabilizare, barele sunt conectate la mijlocul lor de un disc, astfel ca punctele de conexiune să determine arce egale pe circumferința discului.

- Realizează pe caietul tău un desen al trepiedului.
- Demonstrează că picioarele trepiedului determină un triunghi echilateral.
- Marchează pe desenul tău proiecția vârfului trepiedului pe sol. Justifică modul de construcție.



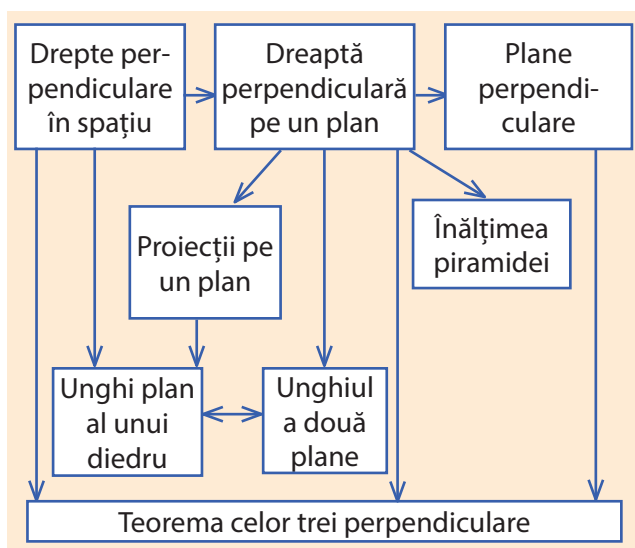
7. În vârfurile A și C ale pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculare pe planul acestuia, pe care se iau, de o parte și de alta a planului, punctele E și F , ca în figură. Știind că $AB = 6$ cm, $AE = 8$ cm și $CF = 4$ cm, calculează:

- lungimea segmentului EF ;
- distanța de la punctul B la dreapta EF ;
- distanța de la punctul F la dreapta ED .



Ce am învățat?

●●●● ▷ Rezolv testele pentru a verifica dacă pot:

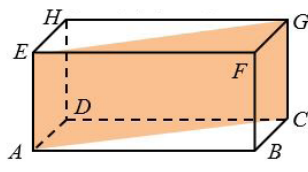


- să determin perpendicularitatea în spațiu, între drepte și/sau plane cu ajutorul proprietăților relațiilor de paralelism și de perpendicularitate
- să precizez proiecții pe un plan ale unor puncte, drepte și segmente
- să construiesc înălțimea unei prisme sau a unei piramide
- să calculez măsura unghiului a două plane în diverse configurații

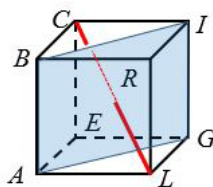
Utilizează schema de mai sus și adaugă în portofoliu elementele esențiale din lecțiile unității 6, referitoare la conceptele menționate.

●●●● ▷ Testul 1

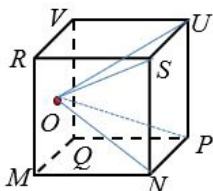
1. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$, demonstrează că planele (ABC) și (ACG) sunt perpendiculare.



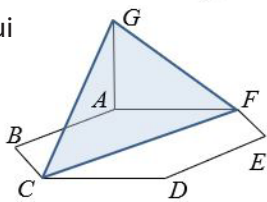
2. Determină, în cubul $ALGEBRIC$, proiecția segmentului CL pe planul (ABG) .



3. Notăm cu O centrul feței $MQVR$ a cubului $MNPQRSUV$. Construiește înălțimea piramidei $ONPUS$.

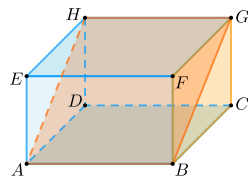


4. În vârful A al hexagonului regulat $ABCDEF$ se ridică perpendiculara pe planul hexagonului, pe care se consideră punctul G , astfel ca $AG = 3$ cm. Dacă $AB = 6$ cm, calculează măsura unghiului dintre planele (ABC) și (GCF) .

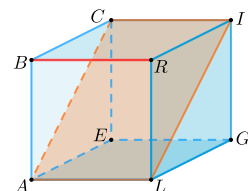


●●●● ▷ Testul 2

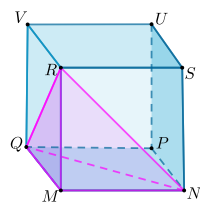
1. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$, demonstrează că planele (ABG) și (BCG) sunt perpendiculare.



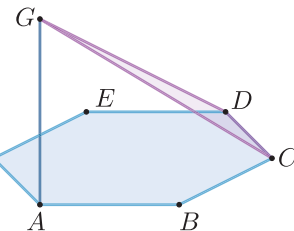
2. Determină, în cubul $ALGEBRIC$, proiecția segmentului BR pe planul (ACL) .



3. Vârfurile M, N, Q și R ale cubului $MNPQRSUV$ determină un tetraedru. Construiește toate înălțimile acestui tetraedru.



4. În vârful A al hexagonului regulat $ABCDEF$ se ridică perpendiculara pe planul hexagonului, pe care se consideră punctul G , astfel ca $AG = 4$ cm. Dacă $AB = 4$ cm, calculează măsura unghiului dintre planele (ABC) și (GCD) .





Proiect: Geometria în viața de zi-cu-zi

Plan de lucru

- ➔ **Scop:** Veți realiza un album cu imagini ale unor obiecte având forme de poliedre
- ➔ **Materiale necesare:** imagini din reviste sau resurse de pe internet libere de copyright.

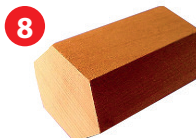
Realizarea proiectului

Lucrați în echipe de câte trei, patru sau cinci colegi!

- ➔ Identificați și numiți formele geometrice din imaginile alăturate.
- ➔ Găsiți și alte imagini reprezentând obiecte cu forme similare acestora. Adăugați în dreptul lor formulele corespunzătoare pentru calculul unor lungimi, măsuri de unghiuri, arie și volume.
- ➔ Atașați o fișă cu probleme propuse și probleme rezolvate despre corpurile identificate.

Pentru început

- ➔ Completați într-un tabel numărul și denumirea fiecărei forme geometrice sugerate.
- ➔ Explicați de ce unele dintre corpuri nu intră în categoria poliedre.



Interacționați în echipa voastră, realizați albumul cu imagini și fișele cu probleme, apoi **prezentați** în clasă câteva probleme propuse și rezolvate.

Autoevaluare

✓ Rezolvă problemele și alege răspunsurile corecte, pentru a verifica ce știi la început de unitate de învățare.

- Un triunghi dreptunghic are o catetă de 6 m și ipotenuza de 10 m. Aria triunghiului este egală cu:
A) 30 m^2 B) 24 m^2 C) 60 m^2 D) 48 m^2
- Un triunghi echilateral are perimetrul de 18 cm. Aria triunghiului este egală cu:
A) 36 cm^2 B) $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$ C) $81\sqrt{3} \text{ cm}^2$ D) $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- Un pătrat are aria de 50 cm^2 . Suma distanțelor de la un vârf al pătratului la diagonalele acestuia este:
A) $5\sqrt{2} \text{ cm}$ B) 10 cm C) 5 cm D) $10\sqrt{2} \text{ cm}$
- Un triunghi are aria de 12 cm^2 . Aria triunghiului format de liniile mijlocii ale acestui triunghi este:
A) 36 cm^2 B) 3 cm^2 C) 6 cm^2 D) 12 cm^2
- Un trapez isoscel are perimetrul de 32 m, linia mijlocie de 10 m și un unghi de 60° . Aria trapezului este egală cu:
A) $30\sqrt{3} \text{ m}^2$ B) 100 m^2 C) $6\sqrt{3} \text{ m}^2$ D) $40\sqrt{3} \text{ m}^2$
- Suma lungimilor tuturor muchiilor unui cub este de 72 cm. Volumul cubului este egal cu:
A) 216 cm^3 B) 4 cm^3 C) 8 cm^3 D) 24 cm^3

Ce știi deja? Verific!

Test inițial de (auto)evaluare

Timp de lucru: 45 minute

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni și rezultate necesare pentru parcurgerea acestei Unități de învățare. Fiecare problemă propusă valorează 1 punct. Se acordă 1 punct din oficiu.

I. Scrie pe foaia de rezolvare cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate:

Aria pătratului

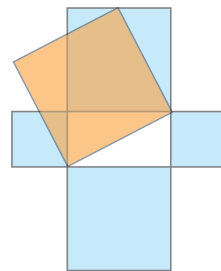
1. Perimetrul unui pătrat este de 12 cm. Aria pătratului este egală cu ... cm².

Volumul cubului

2. Suma lungimilor tuturor muchiilor unui cub este egală cu 24 cm. Volumul acestui cub măsoară ... cm³.

Teorema lui Pitagora

3. Suma ariilor tuturor pătratelor construite pe laturile unui dreptunghi este de 36 cm².
Dacă pe o diagonală a dreptunghiului se construiește un pătrat acesta va avea aria de ... cm².



II. Scrie pe foaia de rezolvare litera corespunzătoare răspunsului corect pentru problemele următoare:

Elemente ale poligoanelor regulate

4. Un hexagon regulat are perimetrul de 12 cm. Lungimea apotemei hexagonului (în cm) este egală cu:

A. $\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

D. $12\sqrt{3}$.

Aria dreptunghiului

5. Perimetrul unui dreptunghi este de 16 cm. Lungimea dreptunghiului este de trei ori mai mare decât lățimea acestuia. Aria dreptunghiului (măsurată în cm²) este:

A. 6

B. 12

C. 16

D. 64.

III. Scrie pe foaia de rezolvare soluțiile complete ale exercițiilor următoare:

Aria triunghiului

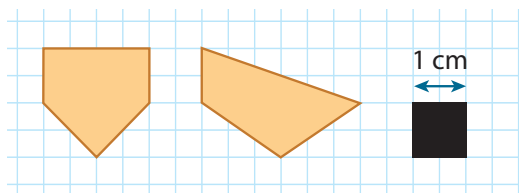
6. Într-un triunghi dreptunghic, perimetrul este egal cu 30 cm, iar ipotenuza are 13 cm. Calculează aria triunghiului.

Aria trapezului

7. Linia mijlocie a unui trapez delimitează două patrulatere, cu ariile de 10 cm² și 6 cm². Calculează raportul dintre lungimile bazelor trapezului.

Compuneri și descompuneri de figuri geometrice

8. Observă figura alăturată, apoi calculează ariile poligoanelor construite pe rețeaua de pătrate din imagine.



Compuneri și descompuneri de corpuri geometrice

9. Fie O centru cubului $ABCDEFGH$. Arată că putem descompune cubul în 6 piramide identice, cu vârful în O . Dacă muchia cubului este de 12 cm, cât este volumul fiecăreia dintre piramidele componente?

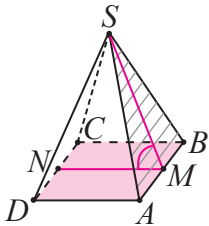
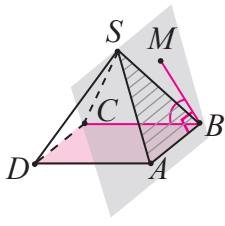
Dacă ai obținut mai puțin de jumătate din punctaj la acest test, este util să revezi definițiile și proprietățile verificate mai sus, pentru a înțelege mai bine ceea ce urmează.

O situație-problemă

Un antreprenor imobiliar proiectează o casă al cărei acoperiș are forma unei piramide patrulater regulate. Muchia bazei acoperișului ar trebui să fie de 6 m, iar înălțimea din vârful acoperișului până la bază, de 4 m. Trebuie calculată măsura diedrului dintre o față laterală și baza acoperișului.

Unghiul diedru este important pentru a asigura stabilitatea structurii și eficiența drenajului apei.

Încercând să calculeze măsura diedrului determinat de fețele SAB și $ABCD$ ale piramidei patrulater regulate $SABCD$, Elena și Andrei au început rezolvarea astfel:

Rezolvarea Elenei	Rezolvarea lui Andrei
Fie M și N mijloacele muchiilor AB și respectiv CD. Observăm că $SM \perp AB$ și $MN \perp AB$, deci $\sphericalangle SMN$ este un unghi plan corespunzător diedrului dat. Măsura diedrului dat este egală cu măsura $\sphericalangle SMN$. 	Observăm că $CB \perp AB$. În planul (SAB), ducem perpendiculara în B pe AB, pe care luăm punctul M, de aceeași parte a lui AB ca și S. Măsura diedrului dat este egală cu măsura $\sphericalangle MBC$. 

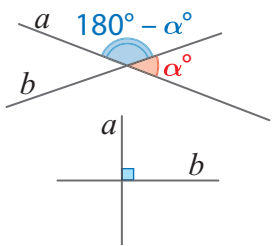
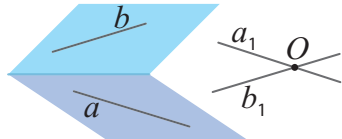
Care dintre cei doi elevi va calcula mai ușor măsura diedrului?

Vrem să știm!

Cum determinăm măsurile de unghiuri în corpurile geometrice?

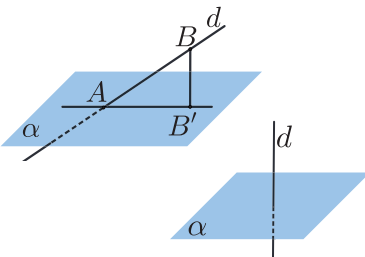
Să ne amintim

Măsura unghiului a două drepte în spațiu

Definim	Reprezentăm	Interpretăm
Măsura unghiului dintre două drepte concurente este egală cu cea mai mică dintre măsurile unghiurilor formate de aceste drepte. Dacă dreptele sunt perpendiculare, atunci măsura unghiului lor este 90°.		$\sphericalangle(a, b) = \min\{\alpha^\circ, 180^\circ - \alpha^\circ\}$ $a \perp b$ sau $\sphericalangle(a, b) = 90^\circ$
Măsura unghiului a două drepte necoplanare este egală cu măsura unghiului dintre paralele duse la aceste drepte printr-un punct oarecare.		$\sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(a_1, b_1)$, unde dreptele a_1, b_1 sunt paralele prin punctul O la a, respectiv b



Măsura unghiului dintre o dreaptă și un plan

Definim	Reprezentăm	Interpretăm
Măsura unghiului dintre o dreaptă și un plan pe care aceasta nu este perpendiculară este egală cu măsura unghiului dintre dreapta dată și proiecția ei pe planul dat. Măsura unghiului dintre o dreaptă și un plan pe care aceasta este perpendiculară este egală cu 90°.		$\sphericalangle(d, \alpha) = \sphericalangle(d, AB')$, unde $AB' = pr_\alpha d$ $d \perp \alpha$ sau $\sphericalangle(d, \alpha) = 90^\circ$

Măsura unghiului dintre două plane

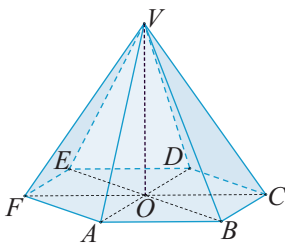
Definim	Reprezentăm	Interpretăm
Măsura unghiului dintre două plane secante care nu sunt perpendiculare este egală cu cea mai mică dintre măsurile diedrelor formate de aceste plane. Măsura unghiului a două plane perpendiculare este egală cu 90°.		$\sphericalangle(\alpha, \beta) = \sphericalangle(d_1, d_2)$, unde $d_1 \subset \alpha$ și $d_1 \perp d$, iar $d_2 \subset \beta$ și $d_2 \perp d$, $\alpha \perp \beta$ sau $\sphericalangle(\alpha, \beta) = 90^\circ$

Probleme rezolvate



1. O piramidă hexagonală regulată $VABCDEF$ are lungimea înălțimii de $6\sqrt{3}$ cm și a laturii bazei de 6 cm. Determină măsura unghiului dintre dreptele AB și VF .

Rezolvare:



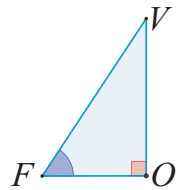
Realizăm figura corespunzătoare datelor problemei.

$VABCDEF$ este piramidă patrulateră regulată cu înălțimea VO .

Dreptele AB și VF sunt necoplanare. Cum $ABCDEF$ este hexagon regulat, $AB \equiv BO \equiv OF \equiv FA$, deci $ABOF$ este romb și $AB \parallel FO$.

Printr-un punct, convenabil ales, construim paralelele la dreptele al căror unghi trebuie determinat; acest punct poate aparține uneia dintre dreptele.

$\sphericalangle(AB, VF) = \sphericalangle(VF, FO)$ Identificăm unghiul care dă măsura unghiului dintre cele două dreptele necoplanare.



Din $VO \perp (ABC)$ și $OF \subset (ABC)$, rezultă $VO \perp OF$.
Unghiul dintre dreptele VF și FO este unghiul ascuțit VFO din triunghiul VOF dreptunghic în O .

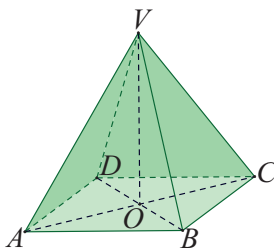
Determinăm măsura unghiului încadrându-l într-un triunghi convenabil.

$$\operatorname{tg} \widehat{VFO} = \frac{VO}{FO} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}, \text{ deci } \widehat{VFO} = 60^\circ.$$

În concluzie, $\sphericalangle(AB, VF) = 60^\circ$.

2. O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ are lungimea înălțimii de $3\sqrt{3}$ cm și a laturii bazei de 6 cm. Determină sinusul unghiului dintre dreapta VA și planul VBC .

Rezolvare:



Realizăm figura corespunzătoare datelor problemei.

$VABCD$ este piramidă patrulateră regulată.

Construim proiecția dreptei date pe planul considerat.

Determinăm proiecția punctului A pe planul feței VBC .

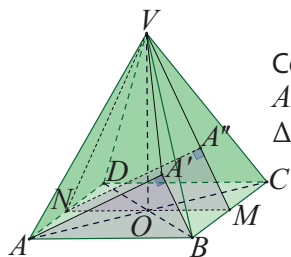
Pentru aceasta construim perpendiculara d pe BC în punctul B în planul VBC .

Notăm cu A' piciorul perpendicularei din A pe d .

Cum BC este perpendiculară pe dreptele concurente AB și d , va fi perpendiculară pe planul (AB, d) , care conține dreapta AA' , deci $BC \perp AA'$. Dreapta AA' este deci perpendiculară pe planul VBC (1) și $A' = \operatorname{pr}_{(VBC)} A$. Obținem $\operatorname{pr}_{(VBC)} VA = VA'$.

$$\sphericalangle(VA, (VBC)) = \sphericalangle(VA, VA') = \sphericalangle A'VA'$$

Identificăm unghiul care dă măsura unghiului format de dreapta dată cu planul considerat.

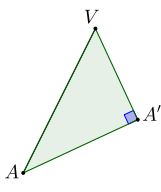
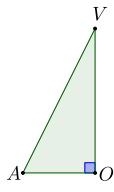
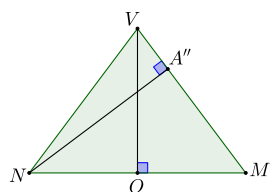


Construim $VM \perp BC$, $MO \cap AD = \{N\}$ și $NA'' \perp VM$.
 $ABMN$ este dreptunghi, deci $MN = AB = 6$ cm.
 $\triangle ABA' \equiv \triangle NMA''$ conform I.U., deci $AA' \equiv NA''$.

Determinăm măsura unghiului dintre dreapta și planul considerat.

Triunghiul VNM este isoscel, cu vârful în V , VO este înălțime, deci și mediană.

$$\operatorname{tg} \widehat{VMO} = \frac{VO}{OM} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}, \text{ deci } \widehat{VMO} = 60^\circ \text{ și triunghiul } VMN \text{ este echilateral.}$$



Obținem $NA'' = VO = 3\sqrt{3}$ cm, deci $AA' = 3\sqrt{3}$ cm.

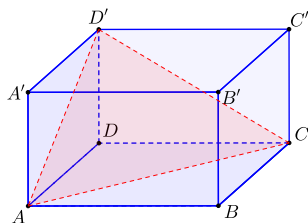
Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul VOA :

$$VA = \sqrt{VO^2 + OA^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{5} \text{ cm.}$$

În triunghiul VAA' , dreptunghic în A' : $\sin \widehat{AVA'} = \frac{AA'}{VA} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

3. Un paralelipiped dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm și $AA' = 2,4$ cm. Calculează măsura unghiului dintre planele $D'AC$ și ABC .

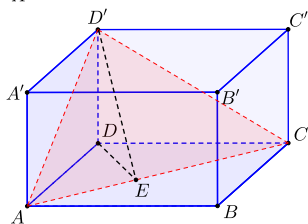
Rezolvare:



Realizăm figura corespunzătoare datelor problemei.

Considerăm diedrul cu fețele ADC , $AD'C$ și cu muchia AC .

Identificăm unul din diedrele formate de cele două plane.

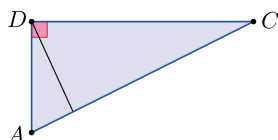


Construim $DE \perp AC$, $E \in AC$.
 Cum $D'D \perp (ADC)$, $DE \perp AC$,
 $DE, AC \subset (ADC)$,
 conform teoremei celor trei perpendiculare, $D'E \perp AC$.

Într-un punct, convenabil ales pe muchia diedrului, construim perpendicularele pe muchia diedrului în cele două semiplane care reprezintă fețele diedrului.

$(D'AC) \cap (DAC) = AC$, $E \in AC$,
 $D'E \perp AC$, $D'E \subset (D'AC)$,
 $DE \perp AC$, $DE \subset (DAC) \Rightarrow \sphericalangle((D'AC), (DAC)) = \sphericalangle D'ED$.

Identificăm unghiul plan corespunzător diedrului care dă măsura diedrului.

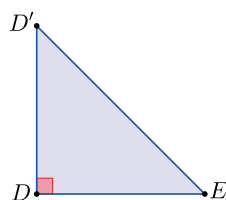


$\triangle ADC$ dreptunghic în D :

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm,}$$

$$DE = \frac{AD \cdot DC}{AC} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4 \text{ cm.}$$

Determinăm măsura diedrului și a unghiului dintre plane.



$\triangle D'DE$ dreptunghic în D și isoscel, deci $\sphericalangle D'ED = 45^\circ$.
 Cum $\sphericalangle D'ED$ este ascuțit, $\sphericalangle((D'AC), (ABC)) = 45^\circ$.

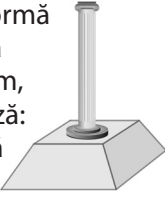
●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

Cei doi elevi au identificat un unghi plan corespunzător diedrului a cărui măsură trebuie să o calculeze. Elena a ales mai convenabil punctul M pe muchia diedrului, întrucât unghiul SMN este mult mai ușor de încadrat într-un triunghi astfel încât să-i determinăm măsura (putem folosi $\triangle SMN$ sau $\triangle SOM$).

●●●●▷ Evaluăm nivelul de bază

1. O piramidă patrulateră regulată $SABCD$ are toate muchiile congruente. Cât este măsura unghiului dintre dreptele SA și CD ?
2. $ABCD A'B'C'D'$ este cub. Determină măsura unghiului dintre planele $(B'BC)$ și $(B'BD)$.

●●●●▷ Probleme propuse

1. Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are muchia laterală de 6 cm și latura bazei de 12 cm. Calculează:
 - a) măsura unghiului dintre dreptele AC și $B'C'$;
 - b) măsura unghiului dintre dreapta $B'M$ cu planul (ABC) , unde M este mijlocul laturii AB ;
 - c) măsura unghiului dintre planele $(AB'C)$ și (ABC) .
2. Într-o piramidă patrulateră regulată, diagonala bazei are lungimea 8 cm și muchia laterală formează un unghi de 45° cu planul bazei. Calculează:
 - a) înălțimea piramidei;
 - b) măsura unghiului format de două muchii laterale opuse;
 - c) măsura unghiului format de două muchii laterale consecutive.
3. Un ghiveci de flori are forma unui trunchi de con, cu diametrele bazelor 38 cm, respectiv 12 cm și înălțimea 13 cm. Ce unghi formează generatoarele trunchiului cu planul reprezentat de suportul pe care este așezat ghiveciul?
 
4. Postamentul unui monument în formă de trunchi de piramidă patrulateră regulată, are laturile bazelor 125 cm, 65 cm și apotema 60 cm. Calculează:
 - a) unghiul format de o față laterală cu planul bazei mari;
 - b) înălțimea postamentului;
 - c) tangenta unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei mari.
5. Prisma hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ are dimensiunile $AB = AA' = 16$ cm. Calculează:
 - a) măsura unghiului dintre dreptele AB și $E'B'$;
 - b) măsura unghiului dintre dreptele AB și $E'D$;
 - c) măsura unghiului dintre dreapta AE' și planul (ABC) ;
 - d) tangenta unghiului dintre planele $(D'EC)$ și (DEC) .
6. În cubul $ABCD A'B'C'D'$ punctul N este mijlocul laturii BB' și $AB = 4$ cm. Calculează măsura unghiului (sau tangenta unghiului) determinat de:
 - a) dreptele AA' și CC' ;
 - b) dreptele AA' și BC ;
 - c) dreptele AA' și BC' ;
 - d) dreptele $A'B$ și AD' ;
 - e) dreptele BD' și CN ;
 - f) dreapta AA' și planul (BCC') ;
 - g) dreapta AB și planul (BCD) ;
 - h) dreapta DD' și planul (ACD) ;
 - i) planul (ADC) și planul (ACD) .
7. În piramida hexagonală regulată $VABCDEF$, $AB = 6$ cm și $VO = 9$ cm. Calculează:
 - a) cosinusul unghiului dintre AB și VA ;
 - b) tangenta unghiului dintre AB și VF ;
 - c) sinusul unghiului dintre VA și VB ;
 - d) sinusul unghiului dintre VB și VD ;
 - e) sinusul unghiului dintre VA și VD ;
 - f) sinusul unghiului dreptei VA cu planul (VBC) ;
 - g) sinusul unghiului dreptei AB cu planul (VBC) ;
 - h) sinusul unghiului planelor (VAB) și (VAF) ;
 - i) tangenta unghiului planelor (VAB) și (VED) .

●●●●▷ Alege și rezolvă în 5 minute!

- A** O piramidă patrulateră regulată are înălțimea 9 cm și latura bazei 12 cm. Calculează tangenta unghiului format de o față laterală cu planul bazei.

B Într-un con cu circumferința bazei de 10π cm, înălțimea formează cu o generatoare un unghi de 30° . Calculează înălțimea conului.

C Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are fețele laterale pătrate și $AA' = 15$ cm. Punctul D de pe latura AB are $\frac{AD}{DB} = 1,5$. Calculează tangenta unghiului dintre dreapta CD și planul (ACC') .



O situație-problemă

Geo îl ajută pe tatăl său la confecționarea unui adăpost pentru Grivei, câinele familiei. Ei au hotărât ca, pe un cub cu muchia de 80 cm, să monteze un acoperiș având forma unei prisme triunghiulare regulate. Totuși, ar dori ca înălțimea adăpostului să nu depășească înălțimea gardului, care este 1,40 m. Vor reuși oare să respecte această condiție?

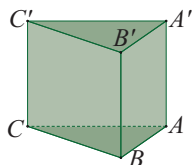
Vrem să știm! Cum determinăm distanțe în corpurile studiate?

Relațiile metrice în triunghiul dreptunghic, la care se adaugă teorema celor trei perpendiculare și reciprocele ei, permit calculul unor distanțe în poliedrele studiate, precum: distanța de la un vârf la o muchie sau la o diagonală a bazei, distanța de la un vârf al bazei la o față laterală, distanța de la centrul bazei la o muchie sau la o față laterală.

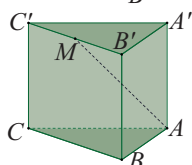
Probleme rezolvate

1. O prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are lungimea laturii bazei de 12 cm și a muchiei laterale de 6 cm. Calculează distanța de la A la muchia $B'C'$.

Rezolvare:



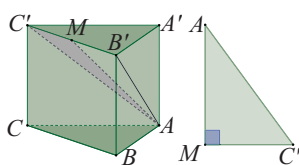
Realizăm figura corespunzătoare datelor problemei



Construim perpendiculara din punctul dat pe dreapta considerată

$AM \perp B'C'$,
 $M \in B'C'$
 $d(A, B'C') = AM$

Identificăm segmentul a cărui lungime dă distanța



Segmentul anterior identificat îl încadrăm într-un triunghi astfel încât să-i putem calcula lungimea

$\triangle AB'C'$ este isoscel cu vârful în A , deci înălțimea AM este și mediană. AM este catetă în $\triangle AC'M$ în care $C'M = \frac{1}{2} B'C' = 6$ cm și

Calculăm distanța

$$AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = \sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5} \text{ cm.}$$

$$AM = \sqrt{AC'^2 - C'M^2} = \sqrt{(6\sqrt{5})^2 - 6^2} = 12 \text{ cm.}$$

Obținem $d(A, B'C') = 12$ cm.

2. O prismă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ are lungimea laturii bazei de 4 cm și a muchiei laterale de $4\sqrt{3}$ cm. Calculează distanța de la O , centrul bazei $ABCD$, la diagonală AD' .

Rezolvare:

Urmăm pașii stabiliți la problema anterioară.

Construim perpendiculara din O pe AD' . În acest scop, aplicăm teorema celor trei perpendiculare.

Fie $OM \perp AD$, $M \in AD$ și $MN \perp AD'$, $N \in AD'$.

$AA' \perp (ABC)$ și $OM \subset (ABC) \Rightarrow AA' \perp OM \Rightarrow OM \perp AA'$.

$OM \perp AD$, $OM \perp AA'$, AD, AA' concurente, $AD, AA' \subset (ADD') \Rightarrow OM \perp (ADD')$.

$OM \perp (ADD')$, $MN \perp AD'$, $MN, AD' \subset (ADD') \Rightarrow ON \perp AD'$, conform teoremei celor trei perpendiculare.

Lucrăm în planul ADD' : $ADD'A'$ este dreptunghi, DP înălțime în triunghiul ADD' .

$$AD' = \sqrt{AD^2 + DD'^2} = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8 \text{ cm,}$$

$$DP = \frac{AD \cdot DD'}{AD'} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{8} = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

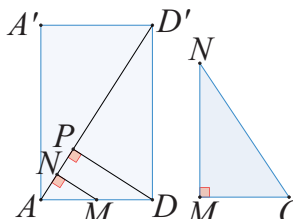
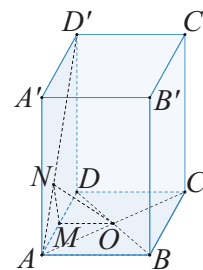
Lucrăm în triunghiul ADP : A' mijlocul lui AD , $MN \parallel DP$, $N \in AP \Rightarrow N$ mijlocul lui AP

$$MN = \frac{DP}{2} = \sqrt{3} \text{ cm.}$$

Lucrăm în triunghiul OMN :

$$ON = \sqrt{OM^2 + MN^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}.$$

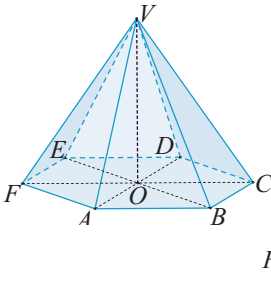
În final, $d(O, AD') = ON = \sqrt{7}$ cm.



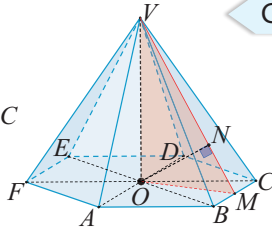
3. O piramidă hexagonală regulată $VABCDEF$ are lungimea laturii bazei de 12 cm și a înălțimii de $6\sqrt{3}$ cm. Calculează distanța de la centrul bazei la o față laterală a piramidei.

Rezolvare:

Cum piramida hexagonală este regulată, distanțele de la centrul bazei la fețele laterale sunt egale. Alegem să calculăm distanța de la O la planul (fața laterală) VBC .



Realizăm figura corespunzătoare datelor problemei



Construim perpendiculara din punctul dat pe planul considerat

Fie M mijlocul lui BC ; cum triunghiurile OBC și VBC sunt isoscele cu baza BC , medianele OM , VM sunt și înălțimi.

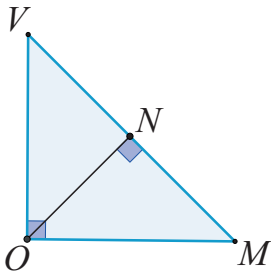
Construim $ON \perp VM$, $N \in VM$.

Din $ON \perp NM$, $NM \perp BC$, $OM \perp BC$, $NM, BC \subset (VBC)$,

conform reciprocei a doua a teoremei celor 3 perpendiculare, $ON \perp (VBC)$

$$d(O, (VBC)) = ON$$

Identificăm segmentul a cărui lungime dă distanța



ON este înălțimea corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul OVN

$$OM = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Triunghiul OMN este dreptunghic isoscel cu baza OM ,

$$\text{deci } ON = OM \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{6} \text{ cm. Deci, } d(O, (VBC)) = 3\sqrt{6} \text{ cm.}$$

Segmentul anterior identificat îl încadrăm într-un triunghi astfel încât să-i putem calcula lungimea.

Calculăm distanța

●●●●▷ **Rezolvăm situația-problemă**

Înălțimea adăpostului este egală cu suma dintre înălțimea cubului și înălțimea unui triunghi echilateral.

$$\text{Avem: } 80 + \frac{80\sqrt{3}}{2} = 80 + 40\sqrt{3} = 40(2 + \sqrt{3}) \approx 40 \cdot 3,73 = 149,2 \text{ cm} > 1,40 \text{ m.}$$

În concluzie, adăpostul va avea înălțimea mai mare decât a gardului.



Care ar fi cea mai mare lungime posibilă a laturii cubului, astfel încât înălțimea adăpostului să nu depășească 1,40 m?

Gândim critic și constructiv!

●●●●▷ **Evaluăm nivelul de bază**

1. O piramidă patrulateră regulată $SABCD$ are toate muchiile congruente. Care este distanța de la vârful B la muchia SD ?

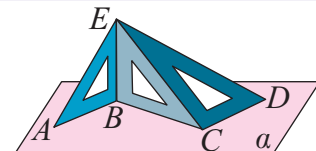
2. O cutie de carton are forma unui cub cu muchia de 50 cm. Ce distanță este între două vârfuri ale cutiei care nu se află pe aceeași față?

●●●●▷ **Exprimare orală**

În piramidă hexagonală regulată $VABCDEF$ de la problema 3, demonstrează că distanțele de la vârful A și de la O la planul (fața laterală) VBC sunt egale.

●●●●▷ **Probleme propuse**

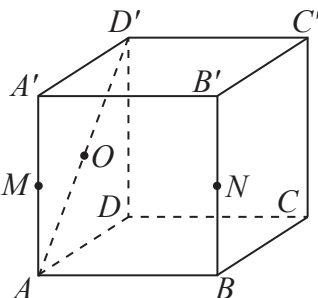
1. Echerile din figura alăturată sunt așezate cu câte una dintre muchii pe planul α , $AB = EB = 12$ cm, iar $\angle ECB = \angle DEC = 30^\circ$. Calculează distanța de la: **a)** E la D ; **b)** A la dreapta EB ; **c)** E la planul α ; **d)** D la planul EBC .



2. a) Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are muchia laterală de 8 cm și diagonala unei fețe laterale de 10 cm. Calculează distanța de la: A' la muchia BC ; C' la planul $(A'AB)$.
 b) Aceeași problemă pentru o prismă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$.
 c) Aceeași problemă pentru o prismă hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$.

★★

4. În cubul $ABCD A'B'C'D'$ punctul M este mijlocul laturii AA' , N este mijlocul laturii BB' , O este centrul feței $ADD'A'$ și $AB = 4$ cm.



- Calculează distanța de la: a) A la D' ; b) B la D' ; c) B la O ; d) D' la BC ; e) D' la BC' ; f) O la BC ; g) C la MN ; h) D' la planul (OMN) ; i) D' la planul $(A'C'D)$.

★★★

7. O cofetărie funcționează într-o încăpere având forma unui paralelipiped dreptunghic, cu dimensiunile bazei 14 m și 12 m, iar înălțimea este 6 m. În centrul tavanului, proprietarul vrea să instaleze un dispozitiv wireless. Ce rază minimă de acoperire trebuie să aibă acest dispozitiv, astfel încât indiferent unde ar sta un client, acesta să aibă acces la Internet?

8. O piramidă triunghiulară regulată $VABC$ are latura bazei $AB = 24$ cm și muchia laterală de 20 cm. Calculează perimetrul minim al triunghiului MBC , unde $M \in VA$.

★★★★

11. Liza avea bețe de chibrit de 4 cm. Cu trei bețe a format un triunghi, iar alte trei le-a rupt în câte două părți egale și a construit un trunchi de piramidă triunghiulară. Arată că, înălțimea trunchiului de piramidă construit de Liza, satisface relația $1,5 \text{ cm} < h < 1,75 \text{ cm}$.

●●●●● ▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A

O piramidă patrulateră regulată are înălțimea 8 cm și latura bazei 12 cm. Calculează distanța de la vârful piramidei la una dintre laturile bazei.

B

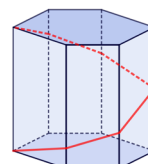
Într-un con cu aria bazei de $16\pi \text{ cm}^2$, generatoarea măsoară 5 cm. Calculează distanța de la vârful conului la planul bazei.

C

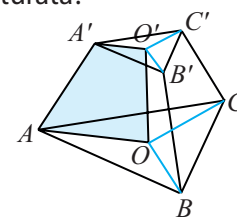
Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are fețele laterale pătrate și $AA' = 15$ cm. Punctul D de pe latura AB are $\frac{AD}{DB} = 1,5$. Calculează distanța de la punctul D la planul (BCC') .

3. a) O piramidă triunghiulară regulată are latura bazei de 6 cm și muchia laterală formează un unghi de 45° cu planul bazei. Calculează distanța de la vârful piramidei la: o muchie a bazei; planul bazei.
 b) Aceeași problemă pentru o piramidă patrulateră regulată.
 c) Aceeași problemă pentru o piramidă hexagonală regulată.

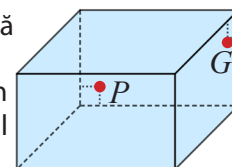
5. O coloană are forma unei prisme hexagonale regulate, cu latura bazei 6 m și înălțimea 15 m. Care este cea mai mică lungime a unei funii cu care poate fi înconjurată coloana, ca în imaginea alăturată?



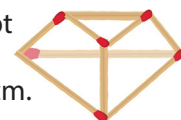
6. În trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ din figura alăturată, $\angle A'AB = 60^\circ$, $AB = 12$ cm și $A'B' = 6$ cm. Calculează distanța de la: a) A' la planul (ABC) ; b) A la planul (BCC') ; c) O la planul (BCC') .



9. Într-o cameră în formă de prismă patrulateră regulată, cu latura bazei 4 m și înălțimea 3 m, avem în punctul P o priză și în punctul G trebuie făcută o gaură. Punctele P și G sunt situate la 0,5 m de cele două muchii mai apropiate. Cablul de alimentare a mașinii de găurit are 6 m. Poate fi realizată operațiunea? Justifică.

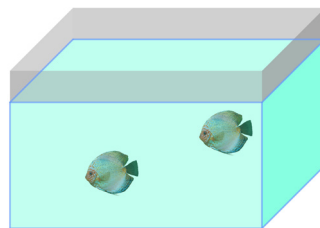


10. În cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu muchia de 12 cm, notăm E simetricul lui A față de dreapta BC și O centrul lui $ABCD$. Calculează distanța de la: a) A' la diagonala AC' ; b) E la planul (ACC') .



●●●▶ O situație-problemă

Tic are un acvariu de forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea 1 m, lățimea 30 cm și înălțimea 60 cm, pe care s-a hotărât să-l populeze cu pești din specia Discus. El dorește să știe câți astfel de pești poate introduce în acvariu, ținând cont că un exemplar are nevoie de minim 25 litri apă, iar în partea de sus a acvariului va rămâne o margine de 10 cm.



Vrem să știm! ▶▶▶ Cum putem calcula volumul și aria unui cub? Dar a unui paralelipiped dreptunghic?

➔ 1. Cum determinăm aria?

Definiții ▶▶

Putem exprima numeric mărimea suprafeței ce delimitează un cub adunând ariile tuturor fețelor acestuia. Obținem astfel **aria cubului**.

Aria unui cub cu latura l este egală cu $6l^2$.

Aria unui cub este egală cu aria oricărei desfășurate a cubului.

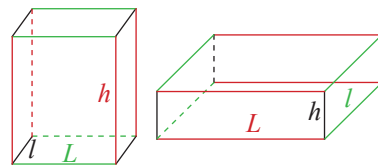
În cazul unui paralelipiped dreptunghic, fețele sunt 6 dreptunghiuri congruente două câte două.

Aria unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile L , l și h este $A = 2(L \cdot l + L \cdot h + l \cdot h)$

Exemplu: Aria unui cub cu latura de 4 cm este: $6 \cdot 4^2 = 96 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Exemplu: Aria unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 4 cm, 2 cm și 3 cm este $A = 2(4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3) = 52 \text{ (cm}^2\text{)}$.

După cum considerăm baza unui paralelipiped dreptunghic, muchiile de lungimi diferite pot reprezenta lungime, lățime și înălțime, unde lungimea și lățimea sunt laturile bazei. Putem diferenția aria bazei, aria laterală (suma ariilor fețelor laterale), aria totală (suma ariilor tuturor fețelor). Așadar: $A_b = Ll$, $A_l = 2(Lh + lh)$ și $A_t = A_l + 2A_b = 2(Ll + Lh + lh)$.

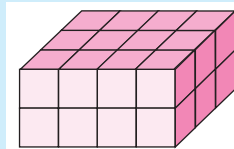


➔ 2. Cum determinăm volumul?

Definiții ▶▶

- **Volumul unui corp** este numărul care indică de câte ori se cuprinde în acel corp o unitate de măsură. Unitatea de măsură standard pentru volum este metrul cub.

Exemplu: Un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 4 m, 3 m și 2 m se descompune în 24 de cuburi cu latura de 1 m. De aceea, volumul acestui paralelipiped este de 24 m^3 .



- **Volumul** unui paralelipiped dreptunghic este $V = L \cdot l \cdot h$ unde L , l și h sunt dimensiunile paralelipipedului: lungimea, lățimea și înălțimea.

Altfel spus: $V = A_b \cdot h$, unde A_b este aria bazei.

Cubul este un caz particular de paralelipiped dreptunghic: cele trei dimensiuni sunt egale.

Așadar, volumul cubului de latura l este: $V = l \cdot l \cdot l$ sau $V_{\text{cub}} = l^3$.

Exemplu: Volumul unui cub cu muchia 4 m este egal cu $4^3 = 64 \text{ (m}^3\text{)}$.

Dacă două corpuri au volume egale, spunem că sunt corpuri **echivalente**.

Exemplu: Un cub cu muchia 10 m este echivalent cu un paralelipiped dreptunghic ce are dimensiunile 25 m, 20 m, 2 m, deoarece ambele au același volum: 1000 m^3 .

●●●● ▷ Rezolvăm situația-problemă

Apa turnată în acvariu ia forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 1 m, 30 cm, 50 cm. Folosim ca unitate de măsură decimetrul și obținem volumul $V = L \cdot l \cdot h = 10 \cdot 3 \cdot 5 = 150 \text{ dm}^3 = 150 \text{ l}$. Numărul maxim al peștilor Discus ce pot fi puși în acvariu este $150 : 25 = 6$ pești.

Dacă acvariul ar fi umplut complet cu apă, câți pești ar putea să găzduiască?
Dar dacă pentru fiecare pește ar fi necesari minim 40 litri de apă?

« Gândim critic și constructiv!

●●●● ▷ Evaluăm nivelul de bază

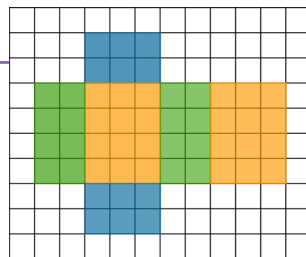
1. Un cub are muchia de 2 cm. Calculează aria și volumul cubului.
2. Calculează aria și volumul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 6 m, 4 m, 2 m.

●●●● ▷ Probleme propuse

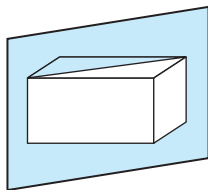
- ★ 1. O parcare dreptunghiulară cu dimensiunile 75 m și 40 m se acoperă cu un strat de asfalt cu grosimea 30 cm.

- a) Câți m^3 de asfalt sunt necesari?
- b) Câte tone cântărește asfaltul, dacă un cm^3 cântărește 2,5 g?

2. Calculează aria, volumul și diagonalele paralelipipedului având desfășurarea alăturată (Presupunem că pătrățelele au latura de 1 cm).

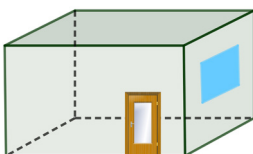


- ★★ 3. Un paralelipiped dreptunghic, cu dimensiunile 4 cm, 3 cm și 2 cm este tăiat cu un plan ce trece prin două dintre diagonalele bazelor. Calculează volumele corpurilor astfel obținute. Contează ce baze ai ales?



4. Un cub de lemn, cu latura de 30 cm, este vopsit în alb. Tăiem cubul în 27 cubulețe echivalente.
- a) Calculează volumul unui cub mic obținut.
 - b) Câte dintre cubulețe au exact o față vopsită?
 - c) Cu ce cantitate de vopsea vom acoperi suprafețele nevopsite ale cubulețelor dacă pentru 1 cm^2 de lemn folosim 0,2 g de vopsea?

- ★★★ 5. Zugrăvirea unei camere costă 12 lei/ m^2 ; peretele opus ușii a costat 432 lei, peretele opus ferestrei a costat 288 lei, iar tavanul 648 lei. Calculează volumul camerei.



6. În cubul $ABCD A'B'C'D'$, notăm cu M mijlocul muchiei BC . Știind că $A'M = 6 \text{ cm}$, calculează aria, volumul cubului și $d[C, (A'M)]$.

7. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$ are laturile bazei $AB = a$, $BC = 2a$ și diagonala $AG = 3a$. Demonstrează că una dintre fețele paralelipipedului este pătrat, apoi calculează aria și volumul paralelipipedului.

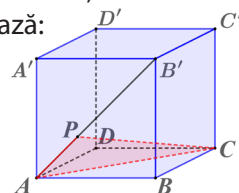
8. O față a unui paralelipiped dreptunghic este un pătrat cu latura de 3 cm și unghiul dintre două diagonale ale paralelipipedului are 60° . Calculează volumul său. (Sunt două cazuri!)

- ★★★ 9. Un cub $ABCD A'B'C'D'$ are aria totală egală cu 864 cm^2 cubi. Calculează:

- a) volumul cubului;
- b) măsura unghiului dintre dreptele $C'D$ și $D'A$;
- c) $d[P, (D'AB)]$, unde P este centrul feței $ABB'A'$.

10. În cubul $ABCD A'B'C'D'$, $P \in AB'$, $PB' = 3 \cdot AP$ și $A_{CPA} = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Calculează:

- a) aria și volumul cubului;
- b) tangenta unghiului dintre CP și (ABC) .



●●●● ▷ Alege și rezolvă în 5 minute!

A

Un cub are aria unei fețe egală cu 36 cm^2 . Calculează aria și volumul cubului.

B

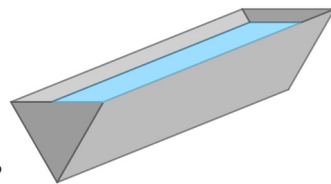
Rezervorul unui automobil are forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea 50 cm și lățimea 40 cm. Dacă în rezervor se află 50 litri motorină, care este adâncimea motorinei din rezervor?

C

Paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ are $AC = 2\sqrt{13} \text{ cm}$, $AC' = 2\sqrt{14} \text{ cm}$, $AD' = 2\sqrt{5} \text{ cm}$. Calculează aria și volumul paralelipipedului.

●●●●▷ O situație-problemă

Ema, membră a unei asociații pentru protecția faunei, ajută la construirea unor jgheaburi care să asigure apa necesară animalelor sălbatice în perioade de secetă. Un jgheab are forma unei prisme triunghiulare regulate, ca în imagine. Cele două dreptunghiuri au fiecare lungimea 2 m și lățimea 40 cm. Ce arie are tabla necesară pentru un jgheab și câți litri de apă încap în acesta?



Vrem să știm! Cum putem calcula volumul și aria unei prisme?

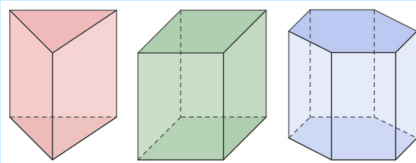
→ 1. Cum determinăm aria?

Definiție

Aria laterală a unei prisme este suma ariilor fețelor laterale. Notăm aria laterală A_l . Pentru o prismă dreaptă cu înălțimea h , aria laterală este $A_l = P_b \cdot h$, unde P_b este perimetrul bazei.

Aria totală a unei prisme este suma ariilor tuturor fețelor prisme.

Notăm aria totală a prisme A_t . Deoarece bazele unei prisme sunt poligoane congruente, deducem $A_t = A_l + 2 \cdot A_b$, unde A_b este aria bazei.



●●●●▷ Exprimare orală

Detaliază modul în care se deduce relația de mai sus pentru diferite tipuri de prisme.

Exemple:

Pentru o **prismă hexagonală regulată** ce are latura bazei 3 cm și înălțimea 2 cm, perimetrul bazei este $P_b = 6 \cdot 3 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$, iar aria laterală este $A_l = 18 \cdot 2 \text{ cm}^2 = 36 \text{ cm}^2$.

Dacă o **prismă patrulateră regulată** are latura bazei 5 m și înălțimea 3 m, aria laterală este $A_l = P_b \cdot h = 60 \text{ m}^2$. Aria bazei este $A_b = l^2 = 5^2 = 25 \text{ (m}^2\text{)}$. Așadar, aria totală este $A_t = 60 + 2 \cdot 25 = 110 \text{ (m}^2\text{)}$.

→ 2. Cum determinăm volumul?

●●●●▷ Să observăm

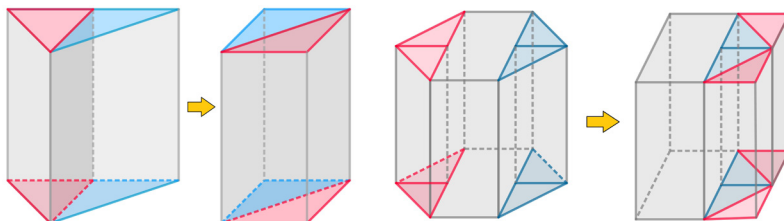
Prin secționarea fiecărei prisme și rearanjarea părților rezultate se obțin paralelipede dreptunghice cu ariile bazelor și înălțimile neschimbate.

Așadar, volumul prisme se poate calcula astfel: $V = A_b \cdot h$.

Exemplu:

Pentru o prismă triunghiulară regulată cu latura bazei 6 cm și înălțimea 2 cm, aria bazei este

$$A_b = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}. \text{ Așadar, volumul este } V = A_b \cdot h = 9\sqrt{3} \cdot 2 = 18\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$$



●●●●▷ Exprimare orală

Descrue modul în care se secționează și rearanjează părțile componente ale prismelor pentru a justifica formula volumului.

●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

Jgheabul este o prismă triunghiulară regulată, cu latura bazei 40 cm și înălțimea 2 m. Pentru un calcul mai simplu, transformăm în dm: 40 cm = 4 dm și 2 m = 20 dm.

Aria bazei este $A_b = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \text{ (dm}^2\text{)}$. Aria tablei necesare este egală cu aria totală a prisme din care se va scădea aria unui dreptunghi (jgheabul nu are capac!).

$$A_{\text{tabla}} = A_t - A_{dr} = A_l + 2 \cdot A_b - A_{dr} = 3 \cdot 4 \cdot 20 + 2 \cdot 4\sqrt{3} - 4 \cdot 20 = 160 + 8\sqrt{3} \text{ (dm}^2\text{)}.$$

Volumul este $V = A_b \cdot h = 4\sqrt{3} \cdot 20 \text{ (dm}^3\text{)} = 80\sqrt{3} \text{ (dm}^3\text{)} = 80\sqrt{3} \text{ (l)}$.

Folosind aproximarea $\sqrt{3} \approx 1,73$, se obține $A_{\text{tabla}} \approx 173,84 \text{ dm}^2 \approx 1,73 \text{ m}^2$ și $V \approx 138,4 \text{ l}$.

Pentru o aproximare mai fină se introduc mai întâi numerele sub radical și apoi se extrage rădăcina pătrată. Practic, cu câte zecimale ar fi suficient să aproximeze Ema aria tablei necesare, exprimată în m^2 ? Dar volumul, exprimat în litri?

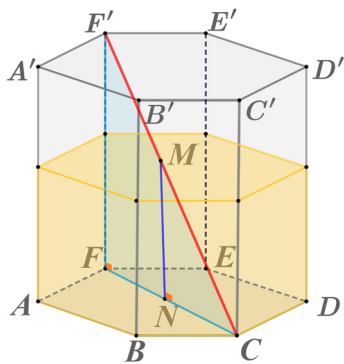
Gândim critic și constructiv!

●●●●▷ Evaluăm nivelul de bază

1. Calculează aria laterală a unei prisme triunghiulare regulate care are înălțimea 7 cm și latura bazei 2 cm.
2. Calculează volumul unei prisme patrulater regulate care are muchia laterală 5 mm și latura bazei 3 mm.

●●●●▷ Problemă rezolvată

Într-un pahar cu suc, de forma unei prisme hexagonale regulate cu înălțimea 9 cm și latura bazei 6 cm, a fost introdus un pai drept, subțire, ca în imaginea alăturată. Partea din pai aflată în suc are 10 cm. Câți mililitri de suc se află în pahar?



Rezolvare:

Sucul a luat forma unei prisme hexagonale regulate, cu latura bazei 6 cm și înălțimea MN . CF este diametru în cercul circumscris hexagonului $ABCDEF$. Raza acestui cerc fiind egală cu latura hexagonului, deducem că $CF = 12 \text{ cm}$. Din teorema lui Pitagora aplicată în $\triangle F'FC$ cu $\angle F'FC = 90^\circ$, se obține $F'C = 15 \text{ cm}$.

Deoarece $MN \perp (ABC)$, $F'F \perp (ABC)$ înseamnă că $MN \parallel F'F$, așadar, conform teoremei fundamentale a asemănării, $\triangle CMN \sim \triangle CF'F$.

$$\frac{CN}{CF} = \frac{CM}{CF'} = \frac{MN}{FF'} \Rightarrow \frac{10}{15} = \frac{MN}{9}, \text{ de unde } MN = 6 \text{ cm}.$$

Hexagonul $ABCDEF$ are aria egală cu suma ariilor a șase triunghiuri echilaterale de latură 6 cm:

$$A_b = A_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Volumul sucului este $V = A_b \cdot h = 54\sqrt{3} \cdot 6 \text{ (cm}^3\text{)} = 324\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)} = 324\sqrt{3} \text{ ml} \approx 324 \cdot 1,73 \approx 561 \text{ ml}$.

●●●●▷ Probleme propuse

1. O cutie de lemn are forma unei prisme patrulater regulate, cu latura bazei 20 cm și înălțimea 12 cm. Calculează volumul, aria laterală și aria totală a cutiei.



2. Ema trebuie să expedieze un colet de forma unei prisme patrulater regulate. A înconjurat cutia cu trei bucăți de bandă scotch, una din ele având lungimea 1,2 m și celelalte două 1,6 m fiecare. Determină: **a)** volumul cutiei; **b)** suprafața cartonului necesar pentru confecționarea cutiei.



Datele din tabele se referă la prisme regulate și sunt exprimate în metri, metri pătrați, respectiv metri cubi. Determină elementele necunoscute.

3. Prismă patrulateră regulată:

	l	h	A_b	A_l	A_t	V
1.	4	2				
2.			9			36
3.				40	48	
4.	3					18

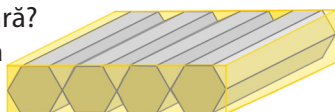
4. Prismă triunghiulară regulată:

	l	h	A_b	A_l	A_t	V
1.	2	3				
2.	4			36		
3.		2	$6\sqrt{3}$			
4.				$30\sqrt{3}$	$54\sqrt{3}$	

★★

7. O bară metalică are forma unei prisme hexagonale regulate. Patru astfel de bare au fost ambalate într-o cutie în formă de prismă patrulateră regulată, cu latura bazei 80 cm.

- a) Ce volum are o bară?
b) Arată că înălțimea cutiei este mai mică decât 18 cm.



5. Prismă hexagonală regulată:

	l	h	A_b	A_l	A_t	V
1.	3	1				
2.			$6\sqrt{3}$	36		
3.	2				$24\sqrt{3}$	
4.		$\sqrt{3}$				18

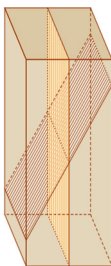
6. Prisma dreaptă $ABCDEF$ are bazele triunghiuri echilaterale cu latura de 3 cm. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC , iar EFG este triunghi dreptunghic, calculează volumul prisme.

8. Prisma dreaptă $ABCDEFGH$ are bazele pătrate cu latura de 6 cm. Diagonalele prisme au 12 cm. Calculează aria totală și volumul prisme.
9. Două prisme regulate, una triunghiulară și cealaltă hexagonală, sunt echivalente.
a) Dacă prismele au laturile bazelor egale, calculează raportul înălțimilor lor.
b) Dacă prismele au înălțimile egale, calculează raportul laturilor bazelor.

★★★

10. O furnică se află într-un punct F situat pe muchia BB' a unei prisme triunghiulare regulate $ABCA'B'C'$, cu fețele laterale pătrate. Unghiul planelor (ACF) și (ABC) are măsura 45° . După ce furnica se apropie cu 12 cm de B' , acest unghi crește cu 15° . Determină aria totală și volumul prisme, rotunjind fiecare rezultat la cel mai apropiat întreg.

11. O grindă de lemn are forma unei prisme patrulateră regulată, cu volumul $0,25 \text{ m}^3$. O tăietură paralelă cu o latură a bazei, realizată cu un plan ce face un unghi de 60° cu planul bazei, are aceeași arie cu tăietura făcută cu un plan paralel cu o față laterală. Calculează aria totală a acestei grinzi.



12. $ABCA'B'C'$ este prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral. Înălțimea prisme este egală cu $4\sqrt{6}$ cm și $BO' = 12$ cm, unde O' este centrul cercului circumscris bazei $A'B'C'$.
a) Arată că volumul prisme este egal cu $432\sqrt{2} \text{ cm}^3$.
b) Calculează $d[C, (A'AB)]$.
c) Arată că $B'C \parallel (AC'O')$.

★★★★

13. În prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$, $AB = 3$ cm, se iau punctele $M \in AA'$ și $N \in CC'$, astfel încât $AM = 5$ cm, $CN = 9$ cm. Știind că punctele D, M, B', N sunt coplanare, calculează aria totală și volumul prisme.
14. Dintr-o bară metalică având forma unei prisme patrulateră regulată $ABCD MNPQ$ s-au confecționat prismele triunghiulare regulate $AEFMGH$ și $CEFP GH$, cu $E, F \in BD$ și $G, H \in NQ$. Cât la sută din metal s-a folosit?

●●●●▷ Alege și rezolvă în 5 minute!

A

Un acvariu cu forma de prismă patrulateră regulată conține 48 l de apă care se ridică la înălțimea de 30 cm. Calculează latura bazei acvariului.

B

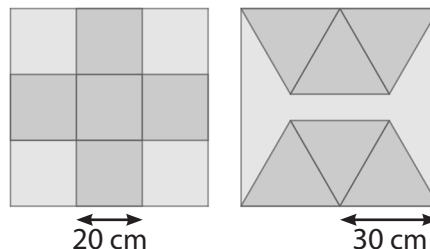
O prismă triunghiulară regulată, având fețele laterale pătrate, are aria totală $2(6 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$. Calculează volumul prisme.

C

O și O' sunt centrele bazelor unei prisme hexagonale regulate, iar $ABB'A'$ este una dintre fețele laterale. Știind că aria totală a prisme este 72 cm^2 , iar cea a prisme $OABO'A'B'$ este 16 cm^2 , calculează aria bazei prisme hexagonale.

O situație-problemă

După ce s-a pus tablă pe acoperișul casei lui Tic, a rămas neutilizată o coală pătrată, cu latura 60 cm. Tic s-a hotărât să confecționeze din aceasta un coș de hârtii cubic, cu muchia 20 cm, fără capac. Liza i-a spus să se gândească dacă nu cumva ar fi mai bine să confecționeze două coșuri în formă de piramidă triunghiulară regulată, având toate muchiile de 30 cm. În imagine, sunt reprezentate desfășurările pentru cele două posibilități. În care caz volumul este mai mare?



Vrem să știm! Cum putem calcula aria și volumul unei piramide triunghiulare regulate?

1. Cum determinăm aria unei piramide?

Definiție

Să considerăm piramida triunghiulară regulată $VABC$.

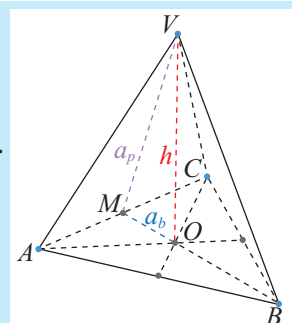
Definim **aria laterală a piramidei** ca fiind suma ariilor fețelor laterale. Ca și în cazul prismelor, notăm aria laterală cu A_l .

Aria laterală a piramidei triunghiulare $VABC$ este $A_l = 3 \cdot A_{VBC} = 3 \cdot \frac{AB \cdot VM}{2}$.

Notând VM , care este apotema piramidei, cu a_p (pentru a o deosebi de apotema bazei, de obicei notată a_b), deducem pentru aria laterală relația

$A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$, unde P_b este perimetrul bazei. **Aria totală a piramidei** este suma

ariilor tuturor fețelor. Aria totală a piramidei este $A_t = A_l + A_b$, unde A_b este aria bazei.



Exemplu:

Pentru o piramidă triunghiulară regulată cu latura bazei 4 m și apotema 6 m, obținem:

$$A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 6}{2} = 36 \text{ (m}^2\text{)}, \quad A_b = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \text{ (m}^2\text{)}, \quad A_t = 36 + 4\sqrt{3} \text{ (m}^2\text{)}.$$

2. Cum determinăm volumul unei piramide?

Experimentăm și generalizăm

Ai nevoie de o piramidă și o prismă, ambele triunghiulare regulate, având bazele triunghiuri congruente și înălțimile egale. Folosește piramida pentru a umple cu apă prisma. De câte ori trebuie să umpli piramida?

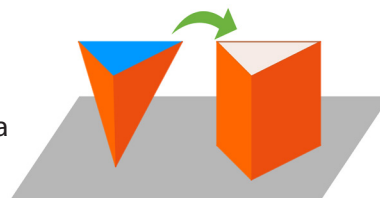
În loc de apă, poți folosi nisip, făină etc. Vei observa că piramida va trebui umplută de trei ori. Altfel spus, o piramidă triunghiulară regulată are volumul de trei ori mai mic decât cel al unei prisme triunghiulare regulate, cu aceeași bază și aceeași înălțime.

Așadar, volumul unei piramide triunghiulare regulate se calculează astfel:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}.$$

Exemplu: O piramidă triunghiulară regulată cu latura bazei 10 cm și înălțimea 6 cm are:

$$A_b = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{10^2 \sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}; \quad V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{25\sqrt{3} \cdot 6}{3} = 50\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$$



Ce părere ai? Cu experimentul de mai sus, formula volumului a fost demonstrată riguros?

Gândim critic și constructiv!

●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

Coșul de hârtii în formă de cub ar avea volumul $V_{cub} = l^3 = 20^3 = 8000 \text{ cm}^3$.
În a doua situație, fiecare coș este un tetraedru regulat, cu muchia 30 cm.

$$\text{Aria bazei este } A_b = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{30^2 \sqrt{3}}{4} = 225\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$CM = SM = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{30\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} \text{ (cm)} \quad OM = \frac{1}{3} \cdot CM = \frac{1}{3} \cdot 15\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

Din teorema lui Pitagora aplicată în $\triangle SOM$ cu $\angle SOM = 90^\circ$, se obține $SO = 10\sqrt{6} \text{ cm}$.

$$\text{Volumul este } V_{pir} = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{225\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{6}}{3} = 2250\sqrt{2} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

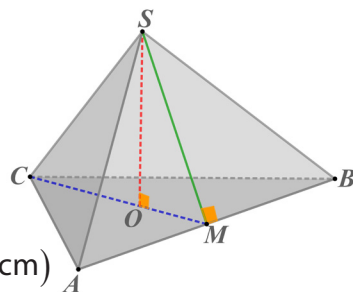
Cele două coșuri piramidale însumează $4500\sqrt{2} \text{ cm}^3$.

Aproximând obținem $4500\sqrt{2} = \sqrt{40500000} \cong 6364 \text{ cm}^3 < V_{cub}$.

În consecință, coșul în formă de cub are un volum mai mare decât suma volumelor coșurilor în formă de piramidă.

Practic, ce avantaje și dezavantaje poți identifica la un coș de hârtii în formă de tetraedru?

Gândim critic și constructiv!



●●●●▷ Evaluăm nivelul de bază

1. Calculează aria laterală a unei piramide triunghiulare regulate care are apotema 3 cm și latura bazei 2 cm.

2. Cu cât este egal volumul unei piramide triunghiulare regulate care are înălțimea 6 m și aria bazei 10 m^2 ?

●●●●▷ Problemă rezolvată

Piramida triunghiulară regulată $VABC$ are apotema 6 cm și aria laterală 162 cm^2 . Se secționează piramida cu un plan paralel cu planul bazei, la 1 cm de acesta. Calculează volumul piramidei mici formate.

Rezolvare:

Deoarece $A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$, se poate calcula L , latura bazei piramidei $VABC$:
 $\frac{P_b \cdot 6}{2} \text{ cm} = 162 \text{ cm}^2 \Rightarrow P_b = 54 \text{ cm} \Rightarrow L = 18 \text{ cm}$.

Notăm $A'B'C'$ triunghiul echilateral format prin secționare și Q centrul acestuia. VM și VN sunt apoteme ale celor două piramide.

$$CM = \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{2} \text{ cm} = 9\sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow OM = \frac{1}{3} \cdot CM = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle VOM$ cu $\angle VOM = 90^\circ$ și obținem $VO = 3 \text{ cm}$.

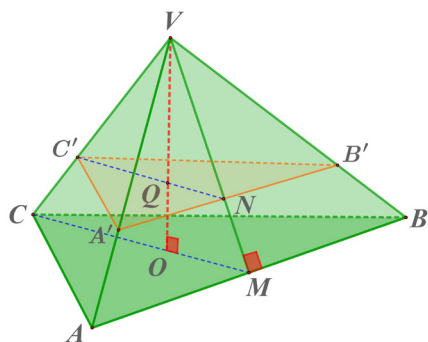
Deoarece $OQ = 1 \text{ cm} \Rightarrow VQ = 2 \text{ cm}$.

Folosim asemănarea dintre $\triangle VOM$ și $\triangle VQN$, justificată pe baza teoremei fundamentale a asemănării

$$(QN \parallel OM): \frac{VQ}{VO} = \frac{VN}{VM} = \frac{QN}{OM} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{QN}{3\sqrt{3}} \Rightarrow QN = 2\sqrt{3} \text{ cm. Notând } l \text{ latura bazei piramidei } VA'B'C',$$

$$\text{avem: } \frac{1}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}, \text{ de unde } l = 12 \text{ cm, iar } A_{A'B'C'} = \frac{12^2 \sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$\text{Volumul piramidei } VA'B'C' \text{ este egal cu } \frac{A_{A'B'C'} \cdot VQ}{3} = \frac{36\sqrt{3} \cdot 2}{3} = 24\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$$



●●●●▷ **Probleme propuse**

★

- O piramidă triunghiulară regulată are latura bazei 5 cm și aria laterală 30 cm². Calculează apotema piramidei.
- Volumul unei piramide triunghiulare regulate este 28 mm³ și înălțimea 7 mm. Cât este aria bazei?
- Datele din tabelul de mai jos se referă la o piramidă triunghiulară regulată și sunt exprimate în cm, cm², respectiv în cm³. Completează rubricile acestui tabel.

	m	l	h	a_p	a_b	A_b	A_l	A_t	V
1.		3	1						
2.				2	1				
3.	5					$4\sqrt{3}$			



★★

- Arată că volumul unui tetraedru regulat, care are muchia a , este $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.
- Un obiect având forma unei piramide triunghiulare regulate $SABC$, cu latura bazei 12 cm și volumul $24\sqrt{3}$ cm³ se așază pe o masă cu fața SBC în jos.
 - La ce distanță de planul mesei este punctul A ?
 - Ce măsură are unghiul diedru format de fața ABC cu planul mesei?
- Într-o piramidă triunghiulară regulată înălțimea este de $4\sqrt{3}$ cm, iar măsura diedrului format de o față laterală cu planul bazei este de 30°. Calculează: **a)** aria laterală și volumul piramidei; **b)** tangenta unghiului format de muchia laterală cu planul bazei; **c)** volumul piramidei mici formate prin secționarea piramidei inițiale cu un plan paralel cu baza, ce trece prin punctul G , aflat pe înălțimea piramidei inițiale la $\frac{2}{3}$ față de vârf.

★★★

- Piramida triunghiulară regulată $VABC$ are muchia laterală $VA = 8$ cm și aria laterală $A_l = 96$ cm². Calculează: **a)** aria totală a piramidei; **b)** volumul piramidei.
- Un punct aflat în interiorul unui tetraedru regulat se află la distanțe egale cu $\frac{\sqrt{6}}{2}$ de toate fețele. Calculează aria totală și volumul tetraedrului.
- Piramida triunghiulară regulată $VABC$ are înălțimea $VO = BC = 24$ cm. Calculează: **a)** volumul și aria totală a piramidei; **b)** distanța de la centrul de greutate al trunghiului VBC la planul ABC ; **c)** tangenta unghiului dintre planele VAO și VAB .
- Calculează raportul dintre volumul cubului $ABCDEFGH$ care are muchia l și volumul piramidei $EAFH$.

★★★★

- O piramidă triunghiulară regulată, având înălțimea H , a fost secționată cu un plan paralel cu planul bazei, astfel încât piramida mică formată cu înălțimea h , să aibă volumul jumătate din cel al piramidei inițiale.
Arată că $1,2 < \frac{H}{h} < 1,3$.
- Într-o piramidă triunghiulară regulată cu înălțimea egală cu 12 cm, raportul dintre aria bazei și aria laterală este $\frac{1}{2}$. Calculează: **a)** volumul și aria totală; **b)** distanța de la un vârf al bazei la o față laterală; **c)** distanța de planul bazei la care trebuie dus un plan paralel cu baza astfel încât ariile laterale ale celor două corpuri formate să fie egale.

●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A

O piramidă triunghiulară regulată are muchia laterală de 10 cm și apotema de 8 cm. Calculează aria laterală.

B

Un tetraedru regulat are volumul $18\sqrt{2}$ cm³. Calculează aria totală a tetraedrului.

C

Două apoteme ale unei piramide triunghiulare regulate sunt perpendiculare, iar distanța între centrele de greutate a două fețe laterale este egală cu 4 cm. Calculează aria totală și volumul piramidei.

●●●●▷ O situație-problemă

Liza a cumpărat un cort ce are forma unei piramide patrulatere regulate, cu latura bazei de 2 m și înălțimea 1,5 m. După prima utilizare a acestuia, Liza și-a exprimat îndoiala privind declarațiile vânzătorului, care spunea că acest cort are volumul de 2 m^3 . Sunt întemeiate îndoielile Lizei?



Vrem să știm! >>>

Cum putem calcula aria și volumul unei piramide patrulatere regulate? Dar ale unei piramide hexagonale regulate?

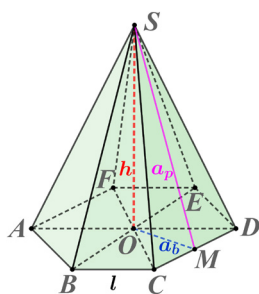
→ 1. Cum determinăm aria?

●●●●▷ Să observăm!

Aria laterală a piramidei patrulatere sau hexagonale regulate este suma ariilor fețelor laterale.

Rezultă $A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$, unde P_b este perimetrul bazei.

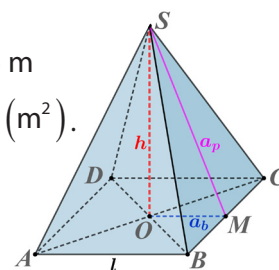
Aria totală a piramidei este suma ariilor tuturor fețelor. Rezultă $A_t = A_l + A_b$, unde A_b este aria bazei.



Exemple:

a) O piramidă hexagonală regulată ce are latura bazei 3 cm și apotema 5 cm are aria laterală $A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 5}{2} = 45 \text{ (cm}^2\text{)}$.

b) Pentru o piramidă patrulată regulată ce are latura bazei 5 m și apotema 3 m, aria laterală este $A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 3}{2} = 30 \text{ (m}^2\text{)}$.
Aria bazei este $A_b = l^2 = 5^2 = 25 \text{ (m}^2\text{)}$.
Aria totală este $A_t = 30 + 25 = 55 \text{ (m}^2\text{)}$.



●●●●▷ Exprimare orală

Cum calculezi aria bazei unei piramide hexagonale regulate care are latura bazei 10 cm?

→ 2. Cum determinăm volumul?

●●●●▷ Să observăm!

Reluăm experimentul de la lecția anterioară, folosind piramide patrulatere sau hexagonale, respectiv prisme cu baze congruente și înălțimi egale. De fiecare dată, piramida va trebui umplută de trei ori pentru umplerea prisme corespunzătoare.

Așadar, volumul unei piramide patrulatere sau hexagonale se calculează astfel: $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$.

Exemplu:

Pentru o piramidă hexagonală regulată care are latura bazei 4 cm și înălțimea 10 cm, aria bazei este

$$A_b = 6 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}. \text{ Volumul este } V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{24\sqrt{3} \cdot 10}{3} = 80\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

Cortul cumpărat de Liza are aria bazei $A_b = l^2 = 2^2 = 4 \text{ (m}^2\text{)}$. Volumul este $V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{4 \cdot 1,5}{3} = 2 \text{ (m}^3\text{)}$.

Observăm că rezultatul coincide cu declarația vânzătorului, deci îndoielile Lizei sunt nejustificate.

Precizează câteva valori ale laturii bazei și înălțimii cortului, astfel încât acesta să aibă volumul 3 m^3 .

Gândim critic și constructiv!

●●●●▷ Evaluăm nivelul de bază

1. Cu cât este egală aria laterală a unei piramide patrulatere regulate care are apotema 3 m și latura bazei 2 m ?
2. Calculează volumul unei piramide hexagonale regulate care are aria bazei 8 cm^2 și înălțimea 3 cm .

●●●●▷ Problemă rezolvată

Piramida hexagonală regulată $VABCDEF$ are $A_l = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$ și $A_t = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Calculează volumul piramidei.

Rezolvare:

Deoarece $A_t = A_l + A_b$, aria bazei este $A_b = 18\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = 6\sqrt{3} (\text{cm}^2)$.

Pe de altă parte, $A_b = 6 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3l^2 \sqrt{3}}{2}$, de unde aflăm l , latura bazei:

$$\frac{3l^2 \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2 \Rightarrow 3l^2 \sqrt{3} = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2 \Rightarrow l = CD = 2 \text{ cm}.$$

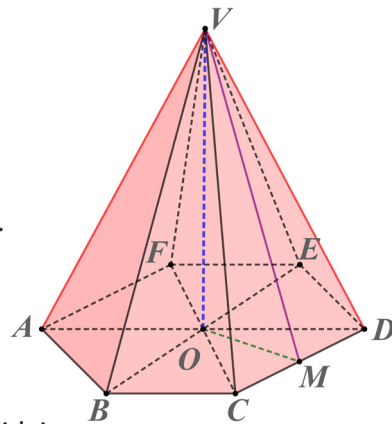
Acum, știind latura bazei și aria laterală, se poate calcula apotema piramidei:

$$\frac{P_b \cdot a_p}{2} = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2 \Rightarrow \frac{6 \cdot 2 \cdot a_p}{2} = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2 \Rightarrow a_p = VM = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$OM = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} (\text{cm}). \text{ Aplicăm teorema lui Pitagora în } \triangle VOM, \angle VOM = 90^\circ:$$

$$OV^2 + OM^2 = VM^2 \Rightarrow OV^2 + \sqrt{3}^2 = (2\sqrt{3})^2 \text{ și obținem } VO = 3 \text{ cm}.$$

$$\text{Volumul piramidei este } \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{6\sqrt{3} \cdot 3}{3} = 6\sqrt{3} (\text{cm}^3).$$



●●●●▷ Probleme propuse

1. O piramidă patrulateră regulată are latura bazei 8 cm și apotema 5 cm . Calculează aria laterală a piramidei.
2. Dacă volumul unei piramide hexagonale regulate este 4 m^3 și înălțimea 6 m , cu cât este egală aria bazei?
3. Un acoperiș are forma unei piramide hexagonale regulate, cu muchia laterală $2,6 \text{ m}$ și latura bazei 2 m . Calculează aria țiglei necesare pentru acest acoperiș.



★★

Datele din tabelele următoare se referă la piramide regulate și sunt exprimate în metri, metri pătrați, respectiv metri cubi. Determină elementele necunoscute:

4. Piramidă patrulateră regulată:

	l	m	h	A_b	A_l	A_t	V
1.	12		$6\sqrt{3}$				
2.	$12\sqrt{3}$	$12\sqrt{6}$					
3.				256		576	
4.	8						192

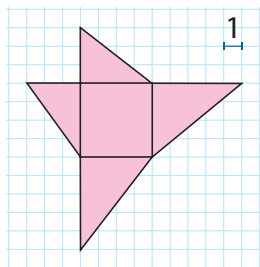
5. Piramidă hexagonală regulată:

	l	h	a_p	a_b	A_b	A_l	V
1.	6		$\sqrt{91}$				
2.					$216\sqrt{3}$		$936\sqrt{3}$
3.		$4\sqrt{3}$		$3\sqrt{3}$			
4.				$2\sqrt{3}$			$80\sqrt{3}$



6. Într-o piramidă patrulateră regulată unghiul format de muchia laterală și planul bazei este de 60° și latura bazei este de 12 cm. Calculează aria totală și volumul piramidei.

7. În figura alăturată, pe o rețea de pătrate cu latura de 1 dm, este reprezentată desfășurarea unei piramide patrulatere. Calculează aria laterală și aria totală ale acestei piramide.



8. Piramida lui Keops din Egipt are în prezent înălțimea de 138 m, iar baza este un pătrat cu latura 227 m.



- a) Calculează volumul piramidei.
b) Dacă din piatra folosită s-ar construi un zid gros de 50 cm, cu înălțimea de 4 m, de forma unui paralelipiped dreptunghic, ce lungime ar avea zidul?

★★★

9. În piramida hexagonală regulată $VABCDEF$, secțiunea axială VAD este un triunghi echilateral a cărui arie este de $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Calculează: a) aria laterală și volumul piramidei; b) măsura diedrului format de fețele VAD și VBE ; c) sinusul unghiului dintre planele (VAB) și (VDE) ; d) volumul piramidei ce are ca bază poligonul determinat de mijloacele muchiilor laterale ale piramidei inițiale și vârful în centrul bazei $ABCDEF$.

10. Un vas având forma unei piramide patrulatere regulate, cu latura bazei 12 dm și înălțimea 18 dm este așezat cu vârful în jos și baza orizontală. Dacă se toarnă 32 litri apă, la ce înălțime se ridică apa în vas?

★★★★

13. Piramida patrulateră regulată $SABCD$ are latura bazei 15 cm, iar distanța de la punctul B la planul (SCD) este egală cu 12 cm. Calculează aria totală și volumul piramidei.

11. Într-o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ înălțimea este de 16 cm, iar raportul dintre aria bazei și aria totală este $\frac{3}{8}$. Calculează:

- a) volumul și aria laterală;
b) cosinusul diedrului format de fețele laterale VAB și VBC .

12. O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ are aria laterală 100 cm^2 , iar unghiul dreptelor VD și BC are 75° . Calculează lungimea celui mai scurt drum pe suprafața laterală a piramidei, punctul de plecare fiind un vârf al bazei, iar punctul de sosire fiind identic cu cel de plecare.

14. O piramidă hexagonală regulată se secționează cu două plane paralele cu baza, la 3 cm de vârf, respectiv la 3 cm de bază. Secțiunile formate au ariile $24\sqrt{3} \text{ cm}^2$, respectiv $96\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Calculează aria totală și volumul piramidei.

●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A

O groapă adâncă de 1 m are forma unei piramide patrulatere regulate, cu vârful în jos. Latura bazei este 3 m. Calculează câți m^3 de pământ s-au scos din groapă.

B

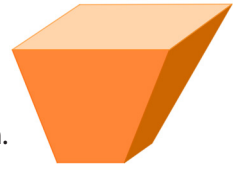
Apotema unei piramide patrulatere regulate este de 2 ori mai mare decât apotema bazei, iar centrul bazei se află la distanța de 2 cm de o față laterală. Calculează volumul piramidei.

C

Abajurul unei veioze are forma unei piramide hexagonale regulate cu latura bazei 20 cm. Pentru partea laterală a abajurului s-au utilizat $0,12 \text{ m}^2$ de pânză. Calculează înălțimea abajurului.

O situație-problemă

Tic vrea să pună într-un ghiveci o orhidee. Un grădinar experimentat i-a recomandat, pentru acea specie, un ghiveci cu capacitatea de cel puțin 10 litri. Tic are un ghiveci în formă de trunchi de piramidă patrulateră regulată, cărui, prin măsurare, i-a găsit dimensiunile: latura bazei mari 26 cm, latura bazei mici 10 cm și muchia laterală 33 cm. Acest ghiveci respectă recomandarea grădinarului?



Vrem să știm!

Cum putem calcula aria și volumul unui trunchi de piramidă regulată?

Definiție

Vom studia cazurile în care trunchiul de piramidă are ca baze triunghiuri echilaterale, pătrate sau hexagoane regulate.

Aria laterală a trunchiului este suma ariilor fețelor laterale. Deoarece acestea sunt trapeze isoscele, fiecare față laterală are aria egală cu

$$\frac{(L+l) \cdot a_t}{2}, \text{ unde } L \text{ și } l \text{ sunt laturile}$$

bazelor, iar a_t este apotema trunchiului (înălțimea unei fețe laterale).

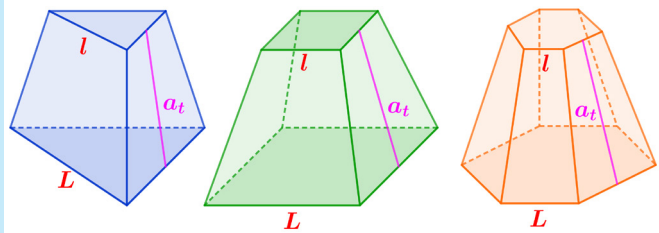
Fie n numărul fețelor laterale, $n \in \{3; 4; 6\}$. Obținem:

$$A_l = n \cdot \frac{(L+l) \cdot a_t}{2} = \frac{(nL + nl) \cdot a}{2} = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_t}{2},$$

unde P_B este perimetrul bazei mari, iar P_b perimetrul bazei mici.

Așadar, pentru orice trunchi de piramidă

$$\text{regulată, } A_l = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_t}{2}.$$



Aria totală a trunchiului este:

$A_t = A_l + A_B + A_b$, unde A_B este aria bazei mari, iar A_b aria bazei mici.

Exemplu: Un trunchi de piramidă hexagonală regulată are laturile bazelor 4 cm și 2 cm, iar apotema 3 cm. Aria laterală este

$$A_l = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_t}{2} = \frac{(6 \cdot 4 + 6 \cdot 2) \cdot 3}{2} = 54 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Aria totală este:

$$A_t = A_l + A_B + A_b = 54 + 6 \cdot \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} = 54 + 30\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Teoremă

Volumul unui trunchi de piramidă regulată este $V = \frac{h}{3} (A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b})$, unde h este înălțimea, A_B este aria bazei mari, iar A_b aria bazei mici.

Demonstrație:

În figura alăturată este reprezentat un trunchi de piramidă patrulateră regulată și piramida din care provine acesta, dar raționamentul va fi aplicabil și celorlalte două tipuri de trunchiuri studiate.

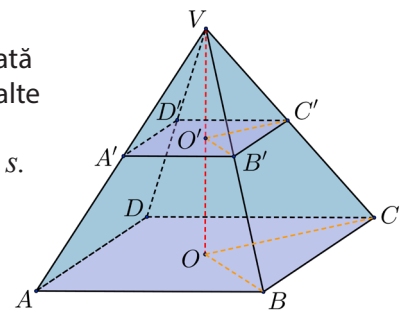
Notăm $OO' = h$, $VO = H$ și, pentru o scriere mai comodă, $A_{ABCD} = S$, $A_{A'B'C'D'} = s$.

Volumul trunchiului este egal cu diferența volumelor celor două piramide:

$$V_{tr} = \frac{S \cdot H}{3} - \frac{s \cdot (H-h)}{3} = \frac{1}{3} [(S \cdot H - s \cdot (H-h))] = \frac{1}{3} [(S-s)H + sh] \quad ①$$

Deoarece $O'B' \parallel OB \Rightarrow \triangle VO'B' \sim \triangle VOB$ (T.F.A.). Deci $\frac{VO'}{VO} = \frac{O'B'}{OB} = \frac{H-h}{H}$ ②

Deoarece $O'C' \parallel OC \Rightarrow \triangle VO'C' \sim \triangle VOC$ (T.F.A.). Deci $\frac{VO'}{VO} = \frac{O'C'}{OC} = \frac{H-h}{H}$ ③



Din relațiile ② și ③ rezultă $\frac{O'B'}{OB} = \frac{O'C'}{OC} = \frac{H-h}{H}$ ④, dar având și $\angle B'OC' = \angle BOC$, deducem,

conform criteriului de asemănare L.U.L., că $\triangle B'O'C' \sim \triangle BOC$, iar raportul lor

de asemănare este $\frac{H-h}{H}$. Înseamnă că $\frac{A_{B'OC'}}{A_{BOC}} = \left(\frac{H-h}{H}\right)^2$, de unde $\frac{s}{S} = \left(\frac{H-h}{H}\right)^2$.

Rezultă $\frac{H-h}{H} = \sqrt{\frac{s}{S}}$, de unde $1 - \frac{h}{H} = \sqrt{\frac{s}{S}}$. Obținem $H = \frac{(S + \sqrt{Ss})h\sqrt{S}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}$, adică $H = \frac{h(S + \sqrt{Ss})}{S - s}$.

Înlocuind în relația ①, obținem $V_{tr} = \frac{1}{3} \left[(S-s) \cdot \frac{h(S + \sqrt{Ss})}{S-s} + sh \right] = \frac{h}{3} (S + s + \sqrt{Ss})$, ceea ce demonstrează relația cerută.

●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

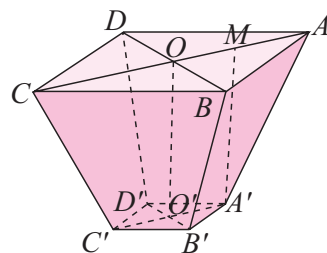
În trapezul dreptunghic $OAA'O'$, în care s-a trasat înălțimea $A'M$, avem:

$$AA' = 33 \text{ cm}, OA = \frac{26\sqrt{2}}{2} = 13\sqrt{2} \text{ cm}, O'A' = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ (cm)}, MA = 8\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle AMA'$, cu $\angle AMA' = 90^\circ$,

$$MA^2 + MA'^2 = AA'^2 \Rightarrow 128 + MA'^2 = 1089 \Rightarrow MA' = \sqrt{961} = 31 \text{ (cm)}.$$

Volumul ghiveciului este: $V = \frac{h}{3} (A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}) = \frac{31}{3} (676 + 100 + \sqrt{676 \cdot 100}) \text{ cm}^3 \approx 10705 \text{ cm}^3 \approx 10,7 \text{ l} > 10 \text{ l}$.



Ce factori ar putea duce la apariția unor erori în calcularea volumului ghiveciului?

Gândim critic și constructiv!

●●●●▷ Evaluăm nivelul de bază

1. Calculează aria laterală a unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată care are apotema 4 m și laturile bazelor 5 m, respectiv 3 m.
2. Calculează volumul unui trunchi de piramidă hexagonală regulată care are aria bazei mari 8 cm^2 , aria bazei mici 2 cm^2 și înălțimea 3 cm.

●●●●▷ Problemă rezolvată

$ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ este un trunchi de piramidă hexagonală regulată, în care $AD' \perp DA'$ și $A_{ADD'A'} = 36 \text{ cm}^2$. Un plan paralel cu bazele, dus prin mijloacele muchiilor laterale, taie AD' în M și DA' în N . Știind că $MN = 2 \text{ cm}$, calculează volumul trunchiului.

Rezolvare:

$ADD'A'$ este trapez isoscel; notăm P intersecția diagonalelor sale.

Dacă $AB = a$ și $A'B' = b$, $AD = 2a$ și $A'D' = 2b$. Totodată, avem $OA = a$, $O'A' = b$.

$\triangle APD$ și $\triangle A'PD'$ sunt dreptunghice isoscele, de unde $OP = a$ și $O'P = b$, așadar

$$OO' = a + b. A_{ADD'A'} = \frac{(2a + 2b) \cdot (a + b)}{2} = (a + b)^2 = 36 \text{ cm}^2 \text{ și, deoarece}$$

$$a + b > 0 \Rightarrow a + b = \sqrt{36} \text{ cm} \Rightarrow a + b = 6 \text{ cm} \Rightarrow OO' = h = 6 \text{ cm}.$$

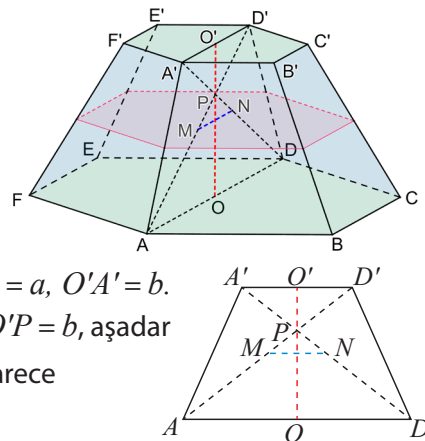
$$M \text{ și } N \text{ sunt mijloace pentru } AD', \text{ respectiv } DA' \Rightarrow MN = \frac{AD - A'D'}{2} = \frac{2a - 2b}{2} = a - b \Rightarrow a - b = 2 \text{ (cm)}.$$

Avem $a + b = 6$ și $a - b = 2$. Deducem $a = 4 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$.

$$A_B = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2, A_b = 6 \cdot \frac{b^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Volumul trunchiului este

$$V = \frac{h}{3} (A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}) = \frac{6}{3} (24\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + \sqrt{24\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3}}) \text{ cm}^3 = 2 (30\sqrt{3} + 12\sqrt{3}) \text{ cm}^3 = 84\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$



●●●●▷ **Probleme propuse**

- Un trunchi de piramidă hexagonală regulată are aria unei fețe laterale 14 cm^2 . Calculează aria laterală a acestui trunchi de piramidă.
- Volumul unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată este 56 m^3 , aria bazei mari 8 m^2 și aria bazei mici 2 m^2 . Cu cât este egală înălțimea trunchiului? Dar dacă este trunchi de piramidă hexagonală regulată?

★★

Datele din tabelele următoare se referă la trunchiuri de piramidă regulate și sunt exprimate în metri, metri pătrați, respectiv metri cubi. Determină elementele necunoscute.

- Trunchi de piramidă patrulateră regulată:

	L	l	m	h	at	A_B	A_b	A_l	A_t	V
1.	8	4			6					
2.	24		15		12					
3.				10		144				1110
4.			10		8			320		

- Trunchi de piramidă triunghiulară regulată:

	L	l	m	h	at	A_B	A_b	A_l	A_t	V
1.	9	6			2					
2.		12		6						$504\sqrt{3}$
3.	9				2			36		
4.			5			$81\sqrt{3}$	$36\sqrt{3}$			
5.		4						$15\sqrt{3}$	$28\sqrt{3}$	

★★★

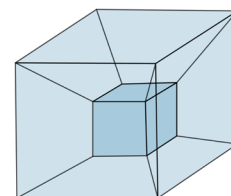
- Trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are $AB = 18 \text{ cm}$, $A'B' = 12 \text{ cm}$ și apotema de 6 cm . Determină:

- aria totală și volumul trunchiului;
- distanța de la A' la planul BCC' .

★★★★

- Două cuburi sunt situate unul în interiorul celuilalt, astfel încât fețele lor sunt respectiv paralele, centrele coincid și unul din ele are muchia egală cu jumătate din muchia celuilalt, ca în figură. Vârfurile cuburilor determină șase trunchiuri de piramidă patrulateră regulată. Dacă un trunchi are volumul 252 cm^3 , calculează:

- Volumul fiecărui cub; b) Aria totală a fiecărui trunchi de piramidă.



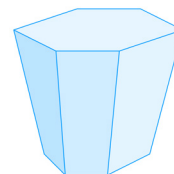
- Într-o piramidă regulată se fac două secțiuni paralele cu baza, care împart înălțimea în trei segmente congruente. Demonstrează că unul din cele trei corpuri formate are aria laterală egală cu media aritmetică a ariilor laterale ale celorlalte două corpuri.

- Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are aria totală 146 cm^2 . Dacă laturile bazelor sunt 7 cm , respectiv 5 cm , calculează apotema trunchiului.
- Un vas are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată, cu înălțimea 30 cm și laturile bazelor 40 cm , respectiv 20 cm . Câți litri de lichid încap în vas?

- Trunchi de piramidă hexagonală regulată:

	L	l	m	h	at	A_B	A_b	A_l	A_t	V
1.	4	2			3					
2.			5	4		$54\sqrt{3}$				
3.							$6\sqrt{3}$	$36\sqrt{3}$	$66\sqrt{3}$	

- Într-un pahar având forma unui trunchi de piramidă hexagonală regulată încap 300 ml lichid. Laturile bazelor interioare sunt de 4 cm , respectiv 3 cm . Arată că înălțimea paharului este mai mică de 10 cm .



- Într-un trunchi de piramidă triunghiulară regulată, centrele bazelor se află la distanțele de 3 cm , respectiv 2 cm de o față laterală, iar aceasta formează cu planul bazei mari un unghi de 60° . Calculează aria totală și volumul trunchiului de piramidă.

●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A

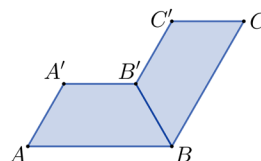
Un trunchi de piramidă hexagonală regulată are aria totală 55 cm^2 , aria bazei mari 20 cm^2 , iar aria unei fețe laterale este egală cu aria bazei mici. Determină aria laterală a trunchiului de piramidă.

B

Postamentul unui monument are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată, cu latura bazei mari 1 m , latura bazei mici 60 cm și apotema 52 cm . Dacă 1 m^3 din piatra din care este construit postamentul are masa 3 t , cât este masa postamentului?

C

Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are $AB = 4 \text{ cm}$, $A'B' = 2 \text{ cm}$ și $A_l = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Arată că, desfășurând într-un plan fețele $ABB'A'$ și $BCC'B'$ ca în figură, punctele A , B' , C sunt coliniare.

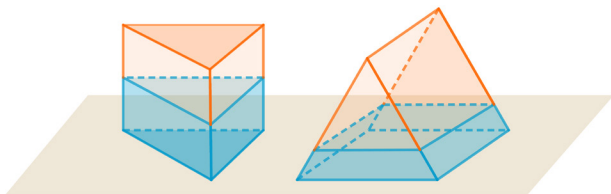


- ★
- O piscină are forma unui paralelipiped dreptunghic, cu lungimea 6 m, lățimea 5 m și adâncimea 1,5 m.
 - Cât costă faianța necesară pentru pereții și fundul piscinei, dacă 1 m² faianță costă 25 lei?
 - Ce preț are apa necesară pentru a umple 80% din piscină, dacă 1 m³ apă costă 5 lei?
 - Dacă arhitectul care a conceput Piramida lui Keops ar fi făcut planurile pentru o piramidă cu înălțimea de 9 ori mai mică decât cea construită, de câte ori ar fi trebuit să fie mărită latura bazei astfel încât volumul să rămână neschimbat?

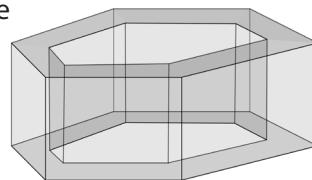
- ★★
- Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are apotema 4 cm și aria laterală 72 cm². Calculează perimetrul și aria secțiunii determinate în trunchi de un plan ce conține mijloacele muchiilor laterale.
 - Un medalion de cupru are forma unui tetraedru regulat cu muchia 18 mm.
 - Medalionul trebuie acoperit cu un strat subțire de aur. Ce suprafață se acoperă?
 - Calculează volumul medalionului.
 - În prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ cu latura bazei de 4 cm, $CA' \perp C'B$. Calculează volumul prisme.
 - În prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ avem $AB = AA' = 2$ cm. Calculează distanța:
 - de la A' la liniile mijlocii ale triunghiului ABC ;
 - de la centrul O' al feței $BCC'B'$ la latura AB .

★★★

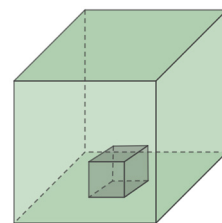
- Pe o masă orizontală se află un vas de sticlă închis, în formă de prismă triunghiulară regulată, cu toate muchiile egale cu 12 cm, umplut cu apă jumătate din capacitatea totală. La ce înălțime se ridică apa dacă vasul este așezat pe una din fețele laterale?



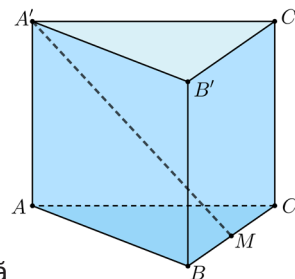
- O piesă metalică are forma unei prisme hexagonale regulate cu înălțimea 1 cm și latura bazei 16 mm, ca în imaginea alăturată. Golul interior este, de asemenea, o prismă hexagonală regulată cu latura bazei 12 mm, având fețele laterale paralele cu ale celeilalte prisme.
 - Ce volum are metalul folosit?
 - Piesa s-a acoperit în întregime cu un strat subțire de nichel. Ce arie are suprafața acoperită?



- Pe fundul unui rezervor în formă de cub cu muchia 1 m se află un cub metallic cu muchia 10 cm. Câți litri de lichid trebuie turnat în rezervor, astfel încât suprafața laterală a cubulețului să fie acoperită în întregime?
- Piramida triunghiulară regulată $VABC$ are apotema bazei de 4 cm și unghiul dintre o față laterală și planul bazei de 60°. Punctul P este proiecția punctului A pe planul VBC . Planul paralel cu (ABC) și care conține punctul P , intersectează muchiile VA , VB , VC în punctele A' , B' , respectiv C' . Calculează raportul volumelor piramidelor $VA'B'C'$ și $VABC$.



- Într-o prismă triunghiulară $ABCA'B'C'$ muchia opusă unui vârf este muchia care nu face parte din aceeași față cu el; de exemplu, muchia opusă vârfului A' este BC .
 - Identifică muchiile opuse celor celor 6 vârfuri ale prisme.
 - Demonstrează că, dacă prisma este regulată, atunci distanța de la orice vârf la muchia opusă acestuia este aceeași, indiferent de vârful ales.
 - Formulează și demonstrează o reciprocă a proprietății de la **b**).

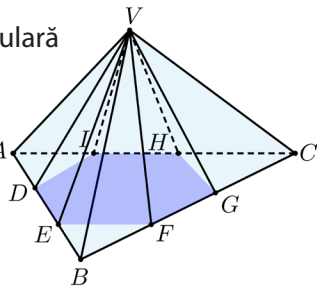


12. În trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ fețele laterale formează cu planul bazei mari unghiuri de 45° . Distanța de la punctul A la planul (BCC') este 1 m, iar distanța de punctul B' la planul (ACC') este egală cu 50 cm. Calculează aria totală și volumul trunchiului de piramidă.

★★★

15. Într-o piramidă triunghiulară regulată $VABC$, având latura bazei 12 cm, VA este perpendiculară pe apotema inclusă în fața VBC . Calculează aria totală și volumul piramidei.

16. În piramida triunghiulară regulată $VABC$ din figura alăturată, punctele D, E, F, A, G, H, I împart laturile bazei în câte trei segmente congruente.



a) Demonstrează că $VDEFGHI$ este piramidă regulată.

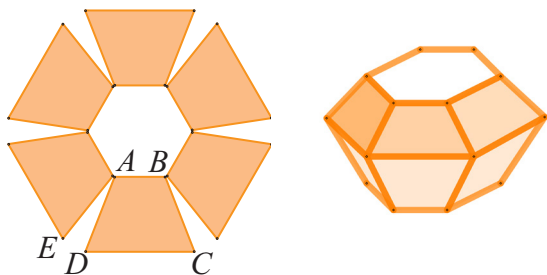
b) Verifică egalitățile: $\frac{A_3}{A_6} = \frac{V_3}{V_6} = \frac{3}{2}$, unde

A_3, V_3 sunt aria totală, respectiv volumul piramidei $VABC$, iar A_6, V_6 sunt aria totală, respectiv volumul piramidei $VDEFGHI$.

17. Matei a confecționat un calendar interesant: a decupat din carton desfășurările suprafețelor laterale a două trunchiuri de piramidă hexagonală regulată și apoi le-a atașat ca în figură. Pe fiecare din cele 12 fețe a lipit câte o lună din calendar. Pentru o desfășurare se cunosc: $AB = AD = 4$ cm și $\angle EAD = 30^\circ$.

a) Află aria cartonului folosit.

b) Arată că înălțimea obiectului confecționat de Matei este mai mică de 7 cm.

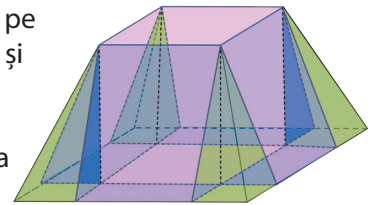


13. Piramida hexagonală regulată $VABCDEF$ are $A_l = 108$ cm², iar $\operatorname{tg} u = 2$, unde $u = \angle(VE, AB)$. Calculează volumul piramidei.

14. În prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ unghiul dreptelor $A'B$ și $B'C$ are măsura 60° , iar distanța de la punctul A la planul $(A'BD)$ este $2\sqrt{3}$ cm. Calculează aria totală și volumul prisme.

18. Piramida hexagonală regulată $VABCDEF$ are latura bazei de lungime l , înălțimea de lungime h , iar aria sa laterală este egală cu aria totală a piramidei $VACE$. Determină tangenta unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei $VABCDEF$.

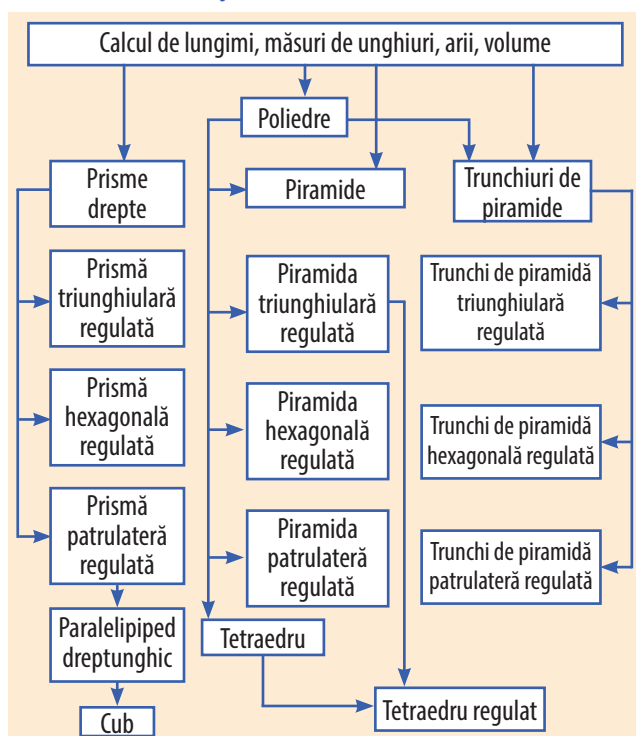
19. **Investigație** Ana și Geo încearcă să înțeleagă mai bine formula pentru calculul volumului unui trunchi de piramidă. Ei s-au gândit să „taie” un trunchi de piramidă patrulateră regulată cu laturile bazelor de 10 cm și 30 cm și cu înălțimea de 15 cm în mai multe părți. Au secționat corpul geometric cu plane perpendiculare pe planele bazelor și care trec prin muchiile bazei mici, ca în figura alăturată.



- a) Observă figura și descrie fiecare dintre cele 9 corpuri geometrice obținute.
- b) Unul dintre aceste corpuri geometrice este o prismă patrulateră regulată. Care sunt dimensiunile acestei prisme? Cât este volumul acestei prisme?
- c) Ana susține că alăturând cele patru piramide patrulatere din „colțuri” obține o piramidă patrulateră regulată. Are dreptate? Ce dimensiuni are piramida formată? Cât este volumul ei?
- d) Andrei observă că cele 4 prisme „culcate” ce se formează în lateralele trunchiului sunt identice. Ce dimensiuni au aceste prisme? Cât este volumul fiecăreia?
- e) Calculează volumul trunchiului de piramidă în două moduri: prin aplicarea formulei și prin însumarea volumelor celor 9 corpuri geometrice. Compară cele două metode.

Ce am învățat?

●●●● ▷ Rezolv testele pentru a verifica dacă pot:

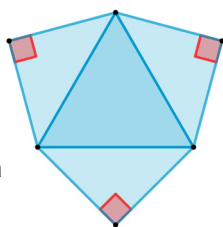


- să calculez aria laterală sau totală și volumul unor prisme, piramide, trunchiuri de piramidă;
- să determin distanțe și unghiuri în interiorul sau pe suprafața unor corpuri geometrice;
- să aplic relațiile metrice din geometria plană în cazul unor configurații spațiale;
- să determin elemente ale corpurilor geometrice, studiate cunoscând aria laterală sau totală și volumul;
- să rezolv probleme cu conținut practic în care este necesară calcularea ariei și a volumului corpurilor geometrice.

Utilizează schema de mai sus și adaugă în portofoliu elementele esențiale din lecțiile unității 7, referitoare la conceptele menționate.

●●●● ▷ Testul 1

1. Calculează aria totală și volumul unui cub care are muchia 1 m.
2. Tetraedrul regulat $ABCD$ are $AB = 10$ cm. Calculează distanța de la mijlocul lui AC la mijlocul lui BD .
3. Un vas în formă de trunchi de piramidă hexagonală regulată are capacitatea 19 l, iar ariile bazelor sunt $0,09 \text{ m}^2$, respectiv $0,04 \text{ m}^2$. Calculează înălțimea vasului.
4. În prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$, fie M proiecția punctului A pe dreapta $A'C$. $MC = 16$ cm și $MA' = 2$ cm. Calculează aria totală și volumul prisme.
5. Din figura alăturată se obține, prin pliere, o piramidă triunghiulară regulată care are suma muchiilor $3(2 + \sqrt{2})$ cm. Calculează aria totală și volumul piramidei.



●●●● ▷ Testul 2

1. Calculează aria totală și volumul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 10 cm, 5 cm, 1 cm.
2. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are înălțimea 5 cm, iar laturile bazelor 16 cm, respectiv 6 cm. Calculează măsura unghiului format de o față laterală cu planul bazei mari.
3. Piramida hexagonală regulată $VABCDEF$ are $VA = 8$ cm și $A_l = 96 \text{ cm}^2$. Află măsura unghiului dintre dreptele VA și DE .
4. Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are latura bazei 2 cm, iar $A_{A'BC} = 2 \text{ cm}^2$. Calculează aria totală și volumul prisme.
5. Într-o piramidă patrulateră regulată, un punct aflat la distanța de 4,5 cm de toate vârfurile bazei se găsește la distanța de 1,5 cm de toate fețele piramidei. Calculează aria totală și volumul piramidei.

Proiect: *Planete și proporții*

●●●●● Plan de lucru

Scop: Veți realiza o „imagine” a sistemului solar, punând împreună informațiile colectate de voi.

Materiale necesare: coli dintr-un caiet de desen, fotografii sau imagini din diferite surse, creioane colorate sau acuarele, calculator de buzunar

●●●●● Realizarea proiectului

Lucrați în echipe de câte trei, patru sau cinci colegi. Fiecare echipă alege una dintre planete.

- ➡ Echipa care reprezintă o planetă va completa pe coala de desen: o imagine a planetei (decupată sau pictată) și datele numerice extrase din tabelul de mai jos.
- ➡ Aproximați aria și volumul planetei alese.
- ➡ Propuneți 2-3 probleme în legătură cu planeta aleasă, care să presupună calcule de arii și volume ale corpurilor rotunde.

Planeta	*Mercur	*Venus	*Pământ	*Marte	*Jupiter	*Saturn	*Uranus	*Neptun
Distanța medie față de Soare (în km)	57 909 175	108 208 930	149 597 890	227 936 640	778 412 010	1 426 725 400	2 870 972 200	4 498 252 900
Circumferința (în km, cu aproximație)	15 321	38 004	40 054	21 333	448 974	378 478	160 500	155 533
În cât timp se rotește în jurul Soarelui (aprox.)	2 luni	6 luni	1 an	2 ani	12 ani	29 ani	84 ani	164,79132
Numărul sateliților cunoscuți	0	0	1	2	67	62	27	14

Circumferința Soarelui:
aproximativ
4 373 027 km



Pentru început:

- ➡ Desenați o axă a numerelor așezând Soarele în origine și alegând ca unitate de măsură 100 de milioane de km. Marcați pe această axă planetele, în ordinea depărtării de Soare.
- ➡ Propuneți exerciții referitoare la datele din imagine.



Interacționați în echipa voastră, propuneți și rezolvați problemele despre planeta aleasă, apoi **prezentați** în clasă rezultatele proiectului.

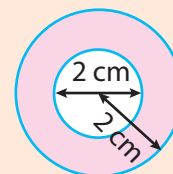
●●●●● Autoevaluare

✓ Rezolvă problemele și alege răspunsurile corecte, pentru a verifica ce știi la început de *unitate de învățare*.

- Formula prin care calculăm lungimea unui cerc de rază R este:
A) $2\pi R$ B) $2\pi R^2$ C) πR^2 D) R^2 .
- Aria unui triunghi echilateral este $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Aria cercului circumscris triunghiului este (în cm^2):
A) 9π B) 36π C) 12π D) 4π .

- Conform datelor de pe figură, aria regiunii colorate este:
A) 0 B) $3\pi \text{ cm}^2$
C) $12\pi \text{ cm}^2$ D) $4\pi \text{ cm}^2$.

- Raportul lungimilor a două cercuri este 1:2. Raportul ariilor lor este:
A) 1:2 B) 1:4 C) 1:1 D) $2:\pi$.



Ce știi deja? Verific!

Test inițial de (auto)evaluare

Timp de lucru: 45 minute

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni și rezultate necesare pentru parcurgerea acestei Unități de învățare. Fiecare problemă propusă valorează 1 punct. Se acordă 1 punct din oficiu.

I. Scrie pe foaia de rezolvare cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate:

Elemente
ale cercului

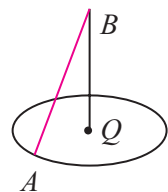
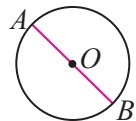
1. În figura alăturată, O este centrul cercului. Segmentul AB , ce trece prin O , se numește ...

Lungimea cercului

2. Lungimea unui cerc este egală cu 12π cm. Raza cercului măsoară cm.

Teorema
lui Pitagora

3. În centrul Q al unui cerc ridicăm perpendiculara pe planul acestuia, pe care considerăm punctul B . Dacă $BQ = 4$ cm, iar distanța de la B la un punct oarecare al cercului este de 5 cm, atunci diametrul cercului măsoară ... cm.



II. Scrie pe foaia de rezolvare litera corespunzătoare răspunsului corect pentru problemele următoare:

Coarde în cerc

4. Într-un cerc cu diametrul de 50 cm, construim o coardă cu lungimea de 48 cm. Distanța de la centrul cercului la acea coardă, măsurată în cm, este:

- A. 24 B. 14 C. 10 D. 7.

Aria cercului

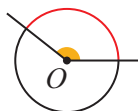
5. Lungimea unui cerc este de 6π cm. Aria acestui cerc este egală cu:

- A. 9 cm^2 B. $9\pi \text{ cm}^2$ C. $36\pi \text{ cm}^2$ D. $72\pi \text{ cm}^2$.

III. Scrie pe foaia de rezolvare soluțiile complete ale exercițiilor următoare:

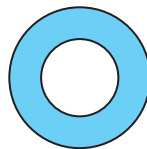
Arce de cerc

6. Într-un cerc cu raza de 9 cm, determină lungimea unui arc cu măsura de 120° .



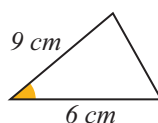
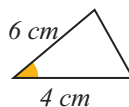
Coroană circulară

7. Cele două cercuri din imaginea alăturată sunt concentrice și au razele de 4 cm, respectiv de 6 cm. Calculează aria suprafeței colorate, delimitată de aceste cercuri (coroană circulară).



Triunghiuri
asemenea

8. În figura alăturată, unghiurile marcate prin culoare sunt congruente. Demonstrează că cele două triunghiuri sunt asemenea, apoi calculează raportul ariilor lor.



Analogia
plan - spațiu

9. Desenează pe caietul tău figura despre care crezi că se potrivește enunțului:



este pentru



ceea ce

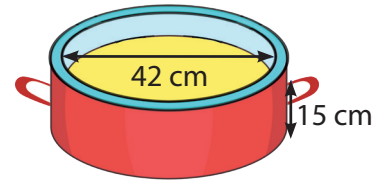


este pentru:

Dacă ai obținut mai puțin de jumătate din punctaj la acest test, este util să revezi definițiile și proprietățile verificate mai sus, pentru a înțelege mai bine ceea ce urmează.

●●●●▷ O situație-problemă

Ana își ajută mama la prepararea gemului de caise. După fierbere într-o oală cilindrică, gemul trebuie pus în borcane de 400 ml. Pentru a afla câte borcane sunt necesare, Ana a găsit, prin măsurare, că diametrul interior al oalei este 42 cm, iar adâncimea conținutului este 15 cm. Cum ar putea calcula Ana câte borcane sunt necesare?

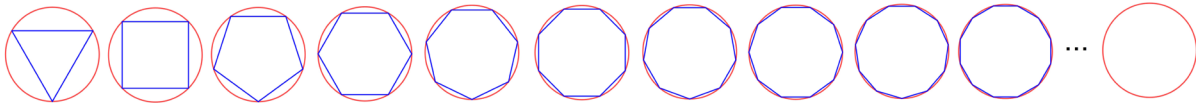


Vrem să știm! Cum putem calcula volumul și aria laterală sau totală ale unui cilindru?

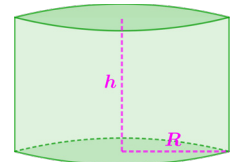
➔ 1. Cum determinăm volumul unui cilindru?

●●●●▷ Să explorăm

Ne amintim că volumul oricărei prisme are formula de calcul $V = A_b \cdot h$, unde A_b este aria bazei, iar h înălțimea prisme. Dacă ne imaginăm că bazele prisme sunt poligoane regulate cu numărul laturilor din ce în ce mai mare, acestea vor fi din ce în ce mai asemănătoare cercului:



Prisma va fi asemănătoare unui cilindru și acceptăm că volumul cilindrului se calculează ca în cazul prisme. Deoarece aria cercului este egală cu πR^2 , deducem pentru volumul cilindrului formula $V_{cil} = \pi R^2 \cdot h$, unde R este raza bazei, iar h înălțimea.



Exemplu:

Dacă un cilindru are raza bazei 3 cm și înălțimea 5 cm, volumul este $V = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 45\pi \text{ cm}^3$. Deoarece $\pi \approx 3,14$ atunci $V \approx 3,14 \cdot 45 = 141,3 \text{ cm}^3$.

●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

Calculăm volumul de gem din oală: $V = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot 21^2 \cdot 15 = \pi \cdot 441 \cdot 15 = 6615\pi \text{ cm}^3$. Numărul de borcane necesare va fi $6615\pi : 400 \approx 6615 \cdot 3,14 : 400 \approx 51,9$, care rotunjit înseamnă 52 borcane.

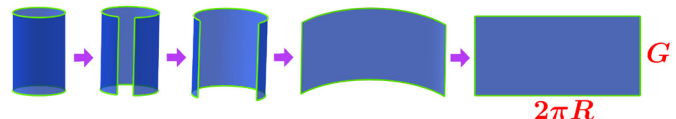
Presupunând că eroarea de măsurare a adâncimii conținutului este de 0,5 cm, care este numărul minim și cel maxim de borcane necesare?

Gândim critic și constructiv!

➔ 2. Cum calculăm ariile unui cilindru?

●●●●▷ Să explorăm

Prin desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru vom obține un dreptunghi ale cărui dimensiuni sunt lungimea cercului de la baza cilindrului și generatoarea acestuia. Așadar, aria laterală a unui cilindru este $A_l = 2\pi RG$. Pentru a obține **aria totală**, vom aduna la **aria laterală** și ariile celor două baze:



$$A_t = 2\pi RG + 2\pi R^2 = 2\pi R(G + R).$$

Exemplu: Dacă un cilindru are raza bazei 4 cm și înălțimea 3 cm, aria laterală este

$$A_l = 2\pi RG = 2\pi \cdot 4 \cdot 3 = 24\pi \text{ cm}^2, \text{ iar aria totală } A_t = 2\pi R(G + R) = 2\pi \cdot 4 \cdot (3 + 4) = 56\pi \text{ cm}^2.$$

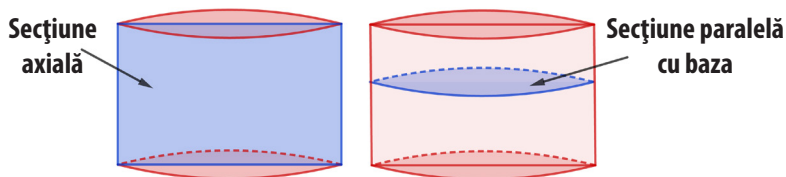
(Am utilizat faptul că generatoarea unui cilindru este egală cu înălțimea.)

➔ 3. Ce secțiuni studiem într-un cilindru?

Definiție

Dacă secționăm un cilindru cu un plan care conține centrele bazelor și, în consecință, este perpendicular pe planele bazelor, se obține un dreptunghi, numit **secțiune axială** a cilindrului.

Dacă planul de secțiune este **paralel cu bazele cilindrului**, secțiunea obținută este un cerc.

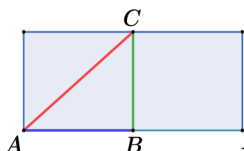
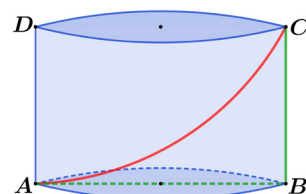


●●●●▷ Evaluăm nivelul de bază

1. Un cilindru are raza bazei 1 m și generatoarea 2 m. Cu cât este egală aria laterală?
2. Calculează volumul unui borcan cilindric care are diametrul bazei 14 cm și înălțimea 10 cm.

●●●●▷ Problemă rezolvată

$ABCD$ este o secțiune axială într-un cilindru cu diametrul 28 cm. Drumul de la A la C pe suprafața laterală a cilindrului este cu 6 cm mai scurt decât drumul pe traseul $A \rightarrow B \rightarrow C$. Calculează aria totală și volumul cilindrului. Folosește aproximarea $\pi \approx \frac{22}{7}$.



Rezolvare:

Pe desfășurarea suprafeței laterale, arcul $\widehat{AB}$ are lungimea egală cu un semicerc:

$$\frac{1}{2} \cdot 2\pi R \approx \frac{22}{7} \cdot 14 = 44 \text{ cm. Notăm } BC = x.$$

Folosind datele din enunț și aplicând teorema lui Pitagora, deducem ecuația $x^2 + 44^2 = (28 + x - 6)^2$. Obținem $x^2 + 1936 = x^2 + 44x + 484$, așadar $x = 33$.

Înlocuim în formulele pentru aria totală și volumul cilindrului $R = 14$ cm, iar $G = h = 33$ cm:

$$A_t = 2\pi R(G + R) \approx 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 14 \cdot (33 + 14) = 4136 \text{ cm}^2 \text{ și } V = \pi R^2 \cdot h \approx \frac{22}{7} \cdot 14^2 \cdot 33 = 20328 \text{ cm}^3.$$

●●●●▷ Explicare orală

Explică de ce în figura de mai sus, în desfășurarea suprafeței laterale a cilindrului regăsim punctul A în două poziții.

●●●●▷ Probleme propuse

1. Câți litri de apă încap într-un butoi cilindric cu diametrul 60 cm și înălțimea 1 m?
2. Completează tabelul, în care datele se referă la un cilindru circular drept.

	R	h	A_b	A_l	A_t	V
1.	4	8				
2.		6	36			
3.	4			24π		
4.		8				128π

3. Raza unui cilindru circular drept este de 12 cm, iar aria laterală este de $72\pi \text{ cm}^2$. Calculează aria secțiunii axiale, volumul și aria totală ale cilindrului.
4. Câți metri de fir de aur cu grosimea 0,2 mm se pot obține dacă se topește o monedă cu diametrul 4 cm și grosimea 3 mm?
5. Într-un cilindru, aria unei secțiuni paralele cu baza este $25\pi \text{ cm}^2$, iar a unei secțiuni axiale 50 cm^2 . Află aria totală și volumul cilindrului.

★★

6. Într-un cilindru circular drept, diagonală secțiunii axiale este de 8 cm și face cu planul bazei un unghi de 45° . Calculează raza cilindrului, aria laterală, aria totală și volumul său.
7. Dintr-o tablă metalică dreptunghiulară, cu dimensiunile 4 m și 6 m, trebuie confecționată partea laterală a unui rezervor cilindric. Există două posibilități: rezervorul poate avea înălțimea 4 m sau 6 m. În ce caz volumul este mai mare?
8. Raza și generatoarea unui cilindru circular drept sunt direct proporționale cu 4 și cu 5, iar aria sa laterală este de $160\pi \text{ cm}^2$. Calculează aria totală și volumul cilindrului.
9. Muchiile laterale ale unei prisme patrulater regulate sunt generatoare ale unui cilindru, iar bazele prisme sunt pătrate înscrise în bazele cilindrului. Calculează raportul volumelor celor două corpuri.

★★★

10. Pentru exprimarea diametrului țevelor se folosește deseori unitatea de măsură „tol” sau „inch”, egală cu 2,54 cm. O țeavă de cupru are diametrul exterior $\frac{1}{2}$ inch, iar grosimea pereților este 1,7 mm. Află cât cântăresc 10 m de astfel de țeavă, dacă 1 cm^3 de cupru cântărește 8,9 g.
11. Silviu a măsurat diametrul roții unei biciclete înainte și după umflarea pneurilor, obținând 70 cm și respectiv 82 cm. Aproximează volumul camerei bicicletei.
12. AA' este o generatoare a unui cilindru cu raza bazei 1 m și $A_t = 4\pi \text{ m}^2$. Arată că drumul cel mai scurt din A în A' , parcurgând suprafața laterală a cilindrului, este mai lung de 6 m.

★★★★

14. Cercurile C_1 și C_2 sunt bazele unui cilindru. Trei puncte de pe C_1 și centrul lui C_2 sunt vârfurile unui tetraedru regulat cu muchia 6 cm. Calculează aria totală și volumul cilindrului.
15. Cum putem proceda pentru a opri într-un pahar de formă cilindrică o cantitate de apă ce ocupă exact jumătate din capacitatea paharului?
16. O vază de formă cilindrică, cu $R = 10 \text{ cm}$ și $G = 30 \text{ cm}$, trebuie ambalată într-o cutie paralelipipedică din carton. Poate fi realizată cutia dintr-o foaie de carton cu dimensiunile $70 \text{ cm} \times 80 \text{ cm}$?
17. Într-un cilindru, secțiunea făcută cu un plan paralel cu înălțimea, aflat la 6 cm de centrul unei baze, este un pătrat cu aria 256 cm^2 . Calculează aria totală și volumul cilindrului.

●●●●▷ Alege și rezolvă în 5 minute!

A

Un cilindru are volumul $90\pi \text{ cm}^3$, iar raza bazei este 3 cm. Calculează aria laterală a cilindrului.

B

Încap 4 litri de apă într-o cratiță cu înălțimea de 10 cm și diametrul de 20 cm?

C

AB este diametru într-o bază a unui cilindru cu raza 4 cm, iar AA' este generatoare. Distanța de la mijlocul lui AA' la mijlocul arcului $\widehat{AB}$ este 6 cm. Calculează aria totală și volumul cilindrului.

●●●●▷ O situație-problemă

Familia lui Mati intenționează să amplaseze câteva trepte în exteriorul casei. Printre materialele necesare, este nevoie și de 1 m^3 de nisip. În curtea casei se află deja o grămadă de nisip cu forma foarte apropiată de a unui con circular drept. Prin măsurare, Mati a constatat că diametrul bazei grămezii este 2,4 m, iar înălțimea 0,7 m. Este suficient acest nisip pentru lucrările care urmează să fie făcute?



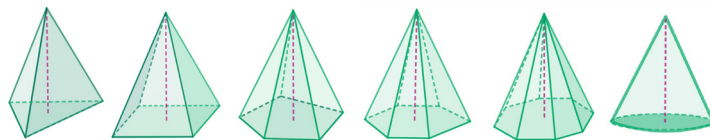
Vrem să știm!

Cum putem calcula volumul și aria laterală sau totală ale unui con?

➔ 1. Cum determinăm volumul unui con?

●●●●▷ Să explorăm

Ne amintim că volumul piramidei se calculează astfel: $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$, unde A_b este



aria bazei, iar h înălțimea. Observăm că dacă numărul laturilor bazei piramidei crește, piramida aproximează din ce în ce mai bine un con. Acceptăm că **volumul conului** se calculează ca în cazul piramidei. Aria bazei fiind egală cu πR^2 , deducem pentru volumul conului formula $V_{\text{con}} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3}$, unde R este raza bazei, iar h înălțimea.

Exemplu:

Dacă un con are raza bazei 5 cm și înălțimea 12 cm, volumul este $V = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 12}{3} = 100\pi \text{ cm}^3$. Folosind aproximarea $\pi \approx 3,14$ obținem $V \approx 3,14 \cdot 100 = 314 \text{ cm}^3$.

●●●●▷ Rezolvăm situația-problemă

Pentru a calcula volumul nisipului din grămadă, înlocuim $R = 1,2 \text{ m}$ și $h = 0,7 \text{ m}$ în formula volumului conului: $V = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 1,44 \cdot 0,7}{3} = 0,336\pi > 0,336 \cdot 3,14 \approx 1,05 \text{ m}^3$. Așadar, în grămadă se află mai mult de 1 m^3 de nisip.

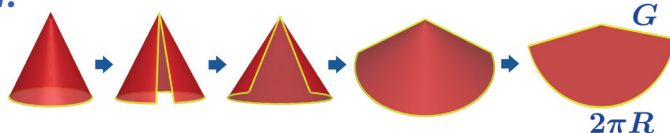
Estimează, folosind același procedeu, volumul unei grămezi de făină, orez sau zahăr.

Gândim critic și constructiv!

➔ 2. Cum determinăm arii ale unui con?

●●●●▷ Să explorăm

Dacă desfășurăm suprafața laterală a unui con circular drept, vom obține un sector circular care are lungimea arcului egală cu $2\pi R$ (lungimea cercului de la baza conului) și care face parte dintr-un cerc cu centrul în vârful conului și raza egală cu G , generatoarea acestuia.



Decupează din hârtie un sector circular și observă ce vei obține prin înfășurarea acestuia! Deoarece aria sectorului circular este direct proporțională cu lungimea arcului, aplicăm regula de trei simplă:

$$\begin{array}{lcl} 2\pi G & \dots\dots & \pi G^2 \\ 2\pi R & \dots\dots & A_{\text{sector}} \end{array} \Rightarrow A_{\text{sector}} = \frac{2\pi R \cdot \pi G^2}{2\pi G} = \pi R G.$$

Așadar, am dedus că **aria laterală** a unui con se calculează astfel: $A_l = \pi R G$.

Aria totală se obține adunând la aria laterală și aria bazei: $A_t = \pi R G + \pi R^2 = \pi R(G + R)$.

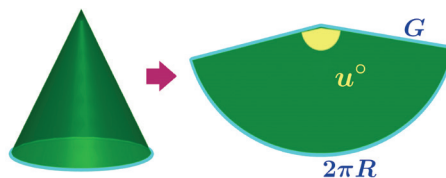
Exemplu:

Un con care are raza bazei 3 cm și generatoarea 5 cm are aria laterală $A_l = \pi R G = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi \text{ cm}^2$, iar aria totală $A_t = \pi R(G + R) = \pi \cdot 3 \cdot (5 + 3) = 24\pi \text{ cm}^2$.

În unele aplicații este util să aflăm unghiul la centru corespunzător sectorului circular obținut prin desfășurarea suprafeței laterale a conului:

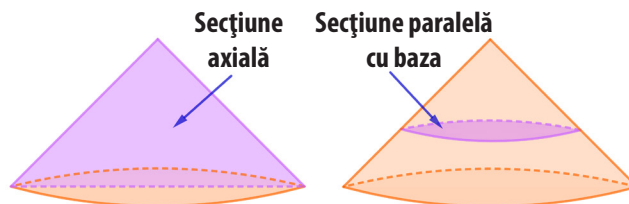
Deoarece lungimea arcului corespunzător este direct proporțională cu măsura unghiului la centru (notat în figură u), prin aplicarea regulii de trei simplă deducem:

$$\begin{array}{lcl} 2\pi G & \dots\dots\dots & 360^\circ \\ 2\pi R & \dots\dots\dots & u^\circ \end{array} \Rightarrow u^\circ = \frac{2\pi R \cdot 360^\circ}{2\pi G} = \frac{360^\circ \cdot R}{G}.$$



➔ 3. Ce secțiuni studiem într-un con?

Prin secționarea unui con circular drept cu un plan care conține înălțimea (deci este perpendicular pe planul bazei) se obține un triunghi isoscel, numit **secțiune axială** a conului. În cazul în care planul de secțiune este **paralel cu baza** conului, secțiunea obținută este un cerc.



●●●● ➤ Evaluăm nivelul de bază

1. Calculează volumul unei pâlnii conice care are raza bazei 4 cm și înălțimea 9 cm.
2. Un con are raza bazei 2 m și generatoarea 3 m. Cu cât este egală aria laterală?

●●●● ➤ Problemă rezolvată

Într-un con circular drept raportul dintre aria totală și aria secțiunii axiale este egal cu $\pi\sqrt{3}$. Calculează unghiul sectorului circular obținut prin desfășurarea suprafeței laterale a conului.

Rezolvare:

- Nu știm lungimi de segmente, așadar notăm convenabil unele distanțe!

Notăm raza bazei R , înălțimea h , generatoarea G .

Deoarece $A_t = \pi R(G+R)$ și $A_{VAB} = \frac{AB \cdot VO}{2} = \frac{2R \cdot h}{2} = Rh$,

deducem: $\frac{A_t}{A_{VAB}} = \frac{\pi R(G+R)}{Rh} = \frac{\pi(G+R)}{h} = \pi\sqrt{3} \Rightarrow \pi(G+R) = \pi h\sqrt{3} \Rightarrow G+R = h\sqrt{3} \quad (1)$

Din teorema lui Pitagora aplicată în $\triangle VOB$, cu $\sphericalangle VOB = 90^\circ$ obținem $h = \sqrt{G^2 - R^2}$.

Înlocuind în relația (1) avem: $G+R = \sqrt{3(G^2 - R^2)} \Rightarrow (G+R)^2 = 3(G^2 - R^2) \Rightarrow$

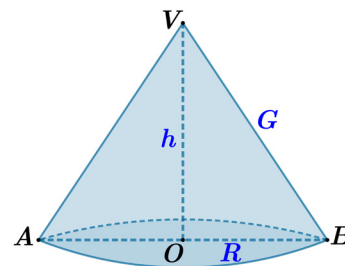
$(G+R)^2 = 3(G-R)(G+R).$

Deoarece $G+R > 0$, este permis să împărțim această egalitate cu $G+R$, de unde deducem

$G+R = 3(G-R) \Rightarrow G+R = 3G-3R \Rightarrow 4R = 2G \Rightarrow G = 2R.$

Unghiul sectorului circular obținut prin desfășurarea suprafeței laterale are măsura

$u^\circ = \frac{360^\circ \cdot R}{G} = \frac{360^\circ \cdot R}{2R} = 180^\circ.$



●●●● ➤ Exprimare orală

Pentru problema de mai sus, precizează natura secțiunii axiale. Ce poți spune despre sectorul circular obținut prin desfășurarea suprafeței laterale a acestui con?

●●●●▷ **Probleme propuse**

- ★ 1. Un cort are forma unui con cu diametrul bazei 2,4 m și înălțimea 1,6 m.

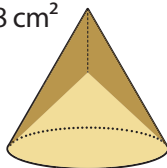
a) Volumul cortului este mai mare de 2 m³?

b) Pentru a confecționa suprafața laterală a cortului au fost suficienți 7 m² de pânză?



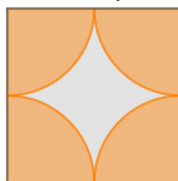
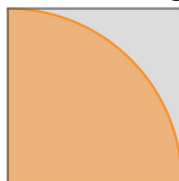
2. În formula pentru aria laterală a unei piramide regulate, înlocuiește apotema cu generatoarea unui con și perimetrul bazei cu lungimea cercului de la baza conului. Ce ai obținut?

- ★★ 5. Dintr-un con de lemn cu aria bazei 18 cm² s-a scobit un con, ca în imaginea alăturată. Lemnul rămas are volumul 90 cm³. Cu cât este egală distanța dintre vârfurile celor două conuri?

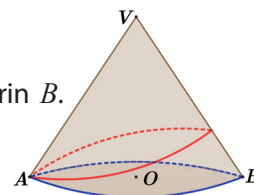


6. O piesă metalică are forma unui con cu secțiunea axială un triunghi dreptunghic isoscel, cu ipotenuza 6 cm. Calculează muchia celui mai mare cub care se poate obține din această piesă.
7. Dacă s-ar mări cu 1 m raza bazei și generatoarea unui con, aria laterală ar crește cu 10 m². Arată că aria laterală a conului este mai mică decât 4 m².

- ★★★ 10. Mati și Ana au fiecare câte o coală pătrată de hârtie, din care își confecționează cornete în formă de con pentru popcorn. Mati și-a făcut un cornet decupând figura din stânga, iar Ana patru cornete, din figura din dreapta. Care din ei va avea o cantitate mai mare de popcorn?



- ★★★★ 13. AB este diametrul bazei într-un con care are înălțimea 4 dm și aria bazei 2π dm². Arată că drumul cel mai scurt avându-l pe A ca punct de plecare și de sosire, pe suprafața laterală a conului, este cu mai mult de 15 cm mai scurt decât drumul prin B .
14. Într-un con raportul dintre raza bazei și înălțime este egal cu $\sqrt{2}$. Arată că în acest con există trei generatoare perpendiculare două câte două.



3. Completează tabelul, în care datele se referă la un con circular drept.

	R	G	h	A_b	A_l	A_t	V
1.	3		4				
2.		25		400π			
3.				144π		384π	
4.	3						12π

4. Două grămezi de orez, în formă de con, au circumferințele bazelor 60 cm, respectiv 50 cm și înălțimile 8 cm, respectiv 12 cm. În care din ele se află mai mult orez?

8. Un con circular drept se obține prin înfășurarea unui sector de cerc al cărui unghi la centru este de 36° și a cărui rază este de 15 cm. Calculează: a) raza, generatoarea și volumul conului; b) aria laterală și aria totală a conului; c) aria secțiunii axiale a conului.

9. Într-un con circular drept secțiunea axială este un triunghi dreptunghic isoscel cu ipotenuza de 6 cm. Calculează: a) aria totală și volumul conului; b) distanța față de vârf la care trebuie secționat conul cu un plan paralel cu baza pentru ca aria laterală a conului mic să fie 25% din aria laterală a conului inițial.

11. Diametrul unui creion cilindric este 1 cm. Partea ascuțită are forma unui con cu înălțimea 2 cm, iar partea de mină neacoperită de lemn este un con cu înălțimea 4 mm. Află ce diametru are mina creionului.



12. Într-un vas conic, cu vârful în jos și baza orizontală, curge apă dintr-un robinet cu debit constant. Robinetul a fost deschis la ora 8:30, iar la ora 8:35 vasul s-a umplut cu apă până la jumătatea înălțimii. La ce oră va fi plin vasul?

●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A

Un con are aria laterală 15π cm², iar generatoarea este 5 cm. Calculează volumul conului.

B

Un con circular drept are secțiunea axială un triunghi echilateral cu latura 6 mm. Calculează aria totală și volumul conului.

C

Un con are raza bazei 9 cm și generatoarea 15 cm. Se secționează conul cu un plan paralel cu planul bazei, la 8 cm de acesta. Calculează aria totală și volumul conului mic format.



O situație-problemă

O furtună a doborât mai mulți copaci, printre care și unul aflat în curtea familiei lui Geo. După curățarea locului, familia dorește să valorifice un buștean având forma unui trunchi de con. Prețul lemnului este în funcție de volumul acestuia. Folosind o ruletă, Geo a măsurat diametrele la capete, găsind 36 cm, respectiv 32 cm și lungimea bușteanului, aceasta fiind 312 cm. Ana i-a sugerat lui Geo să fie atent la un detaliu: 312 cm reprezintă generatoarea trunchiului de con, nu înălțimea acestuia. Cum ar putea Geo să determine volumul bușteanului?

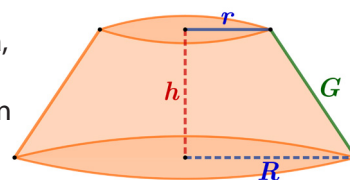
Vrem să știm!

Cum putem calcula volumul și aria laterală sau totală ale unui trunchi de con?

1. Cum determinăm volumul unui trunchi de con?

Extindem

În lecțiile anterioare am văzut că cilindrul poate fi aproximat printr-o prismă, iar conul printr-o piramidă, cu bazele poligoane regulate având numărul laturilor din ce în ce mai mare. Prin analogie, vom aproxima trunchiul de con printr-un trunchi de piramidă. Să considerăm un trunchi de con, având raza bazei mari R , raza bazei mici r , înălțimea h și generatoarea G .



Să ne amintim că volumul trunchiului de piramidă se calculează astfel: $V = \frac{h}{3}(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b})$, unde A_B este aria bazei mari, A_b aria bazei mici, iar h înălțimea. În cazul trunchiului de con avem $A_B = \pi R^2$ și $A_b = \pi r^2$. Obținem formula pentru **volumul trunchiului de con**:

$$V_{tr.con} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

Exemplu: Dacă un trunchi de con are înălțimea 2 cm, iar razele bazelor sunt 7 cm și 4 cm,

$$\text{volumul este } V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{\pi \cdot 2}{3}(7^2 + 4^2 + 7 \cdot 4) = \frac{\pi \cdot 2}{3} \cdot 93 = 62\pi \text{ cm}^3.$$

Folosind aproximarea $\pi \approx 3,14$ obținem $V \approx 62 \cdot 3,14 = 194,68 \text{ cm}^3$.

2. Cum calculăm ariile unui trunchi de con?

Să explorăm

Pentru a deduce modul de calcul al ariei laterale, folosim formula ariei laterale a trunchiului de piramidă,

$$A_l = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_t}{2}, \text{ înlocuind apotema cu generatoarea}$$

și perimetrele bazelor cu lungimile (circumferințele) celor două cercuri: $P_B = 2\pi R$, $P_b = 2\pi r$.

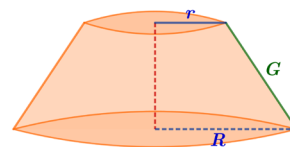
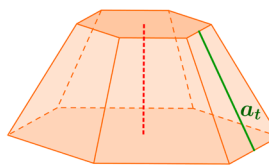
$$\text{Se obține } A_l = \frac{(2\pi R + 2\pi r) \cdot G}{2} = \frac{2\pi(R + r) \cdot G}{2}.$$

Așadar, **aria laterală a trunchiului de con** este $A_l = \pi G(R + r)$.

Aria totală se obține adunând la aria laterală și ariile bazelor: $A_t = \pi G(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$.

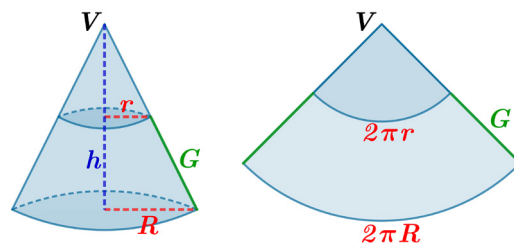
Exemplu: Un trunchi de con care are razele bazelor 5 cm, 3 cm și generatoarea 4 cm are aria laterală

$$A_l = \pi G(R + r) = \pi \cdot 4 \cdot 8 = 32\pi \text{ cm}^2, \text{ iar aria totală } A_t = 32\pi + \pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 3^2 = 66\pi \text{ cm}^2.$$



Exprimare orală

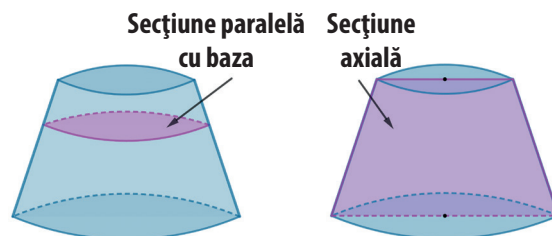
Trunchiul de con provine dintr-un con secționat cu un plan paralel cu baza. Descrie modul în care s-ar putea deduce aria laterală și volumul trunchiului de con, folosind diferențe de arii, respectiv de volume.



3. Ce secțiuni studiem într-un trunchi de con?



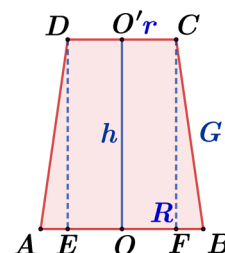
Secțiunea paralelă cu baza într-un trunchi de con este întotdeauna un cerc, iar **secțiunea axială**, care conține centrele bazelor, este un trapez isoscel.



Rezolvăm situația-problemă

Calculăm înălțimea trunchiului de con. Desenăm secțiunea axială $ABCD$, care este un trapez isoscel. Se cunosc: $R = OB = 18$ cm, $r = O'C = 16$ cm, $G = BC = 312$ cm. $AE = FB = 18 - 16 = 2$ cm. Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle CFB$. Obținem:

$FC = \sqrt{97340}$. Așadar, $h = \sqrt{97340} \approx 311,99$ cm. Înlocuim în formula volumului trunchiului de con: $V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr) \approx 283\,444,99 \text{ cm}^3 \approx 0,280 \text{ m}^3$.



Dacă, pentru un calcul mai comod, Geo ar fi înlocuit înălțimea bușteanului cu 312 cm, cât ar fi fost eroarea de calcul?

Gândim critic și constructiv!

Evaluăm nivelul de bază

1. Un trunchi de con are razele bazelor 3 m și 2 m, iar generatoarea este 4 m. Cât este aria laterală?
2. Află volumul unui trunchi de con cu înălțimea 10 cm și razele bazelor 4 cm, respectiv 1 cm.

Problemă rezolvată

Într-un trunchi de con cu razele bazelor 8 cm și 2 cm, există un punct M egal depărtat de planele bazelor și de generatoare. Determină aria totală și volumul trunchiului de con.

Rezolvare:

Care sunt distanțele egale precizate în enunț?

Notăm O, O' centrele bazelor. Evident, punctul M este mijlocul lui OO' .

Avem $MO = MO' = MT$. Totodată $\triangle OAM \equiv \triangle TAM$ și $\triangle O'A'M \equiv \triangle TA'M$,

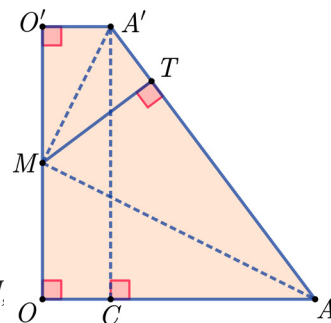
de unde obținem $AT = 8$ cm, $TA' = 2$ cm. AM și $A'M$ sunt bisectoarele

unghiurilor $\angle OAA'$ și $\angle O'A'A$. Acestea fiind suplementare, înseamnă că jumătățile lor, $\angle TA'M$ și $\angle TAM$, sunt complementare. Așadar, $\triangle A'MA$ este dreptunghic în M și, aplicând teorema înălțimii, deducem $MT = \sqrt{AT \cdot A'T} = \sqrt{8 \cdot 2} = 4$ cm, de unde $OO' = 8$ cm.

Înlocuim în formule și obținem:

$$A_t = \pi G(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2 = \pi \cdot 10 \cdot (8 + 2) + \pi \cdot 8^2 + \pi \cdot 2^2 = 168\pi \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr) = \frac{\pi \cdot 8}{3} (8^2 + 2^2 + 8 \cdot 2) = \frac{672\pi}{3} \text{ cm}^3 = 224\pi \text{ cm}^3.$$



●●●●▷ **Probleme propuse**

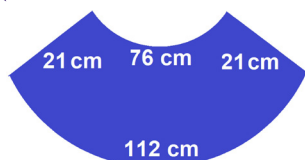
1. Un vas de tablă are forma unui trunchi de con, cu înălțimea 3 dm și diametrele bazelor 10 dm, respectiv 2 dm. **a)** Încap 90 litri de apă în acest vas? **b)** Ce suprafață are tabla folosită pentru partea laterală a vasului?
2. Completează tabelul, în care datele se referă la un trunchi de con circular drept.

	R	r	h	G	A_B	A_b	A_l	A_t	V
1.	6	3	4						
2.		12		10			320π		
3.			$6\sqrt{2}$		36π	9π			
4.	12		8						672π

3. În formulele pentru aria laterală și volumul unui trunchi de con înlocuiește: **a)** r cu R ; **b)** r cu 0. Ce obții?

4. Un trunchi de con circular drept are secțiunea axială un trapez cu bazele 16 cm, respectiv 4 cm și aria 80 cm^2 . Calculează aria totală și volumul trunchiului de con.

★★



5. Ana vrea să confecționeze din pânză un abajur pentru o veioză. Ea folosește pânza din imaginea alăturată, din care va obține suprafața laterală a unui trunchi de con. Pentru ca lumina veiozei să nu fie supărătoare la ochi, abajurul trebuie să aibă cel puțin 20 cm înălțime. Abajurul Anei va respecta această condiție?

6. Un trunchi de con are aria laterală $72\pi \text{ cm}^2$ și generatoarea 9 cm. Se secționează trunchiul cu un plan paralel cu planul bazei, prin mijlocul înălțimii. Calculează aria secțiunii.

★★★

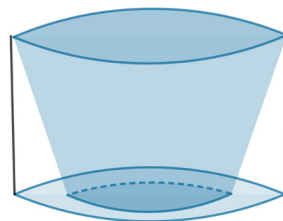
7. Într-o găleată de forma unui trunchi de con, cu baza mică în jos, având diametrele bazelor $\frac{14}{3} \text{ dm}$ și 2 dm, se toarnă 16,5 litri apă și aceasta ajunge la trei sferturi din înălțimea găleții.

Câți litri de apă mai încap în găleată?

Folosește aproximarea $\pi \approx \frac{22}{7}$.

8. Trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $\angle A = 90^\circ$, are bazele de 20 cm și de 4 cm și latura $BC = 18\sqrt{2} \text{ cm}$. Rotind trapezul în jurul laturii AD obținem un trunchi de con. **a)** Calculează aria laterală și volumul trunchiului de con; **b)** Aproximează măsura unghiului format de generatoare cu planul bazei mari.

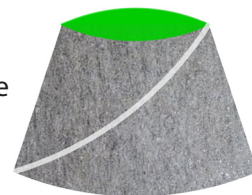
9. Un cazan având forma unui trunchi de con cu diametrele bazelor 4 m, respectiv 2 m și înălțimea 3 m este protejat prin zidărie având forma suprafeței laterale a unui cilindru cu bazele egale cu baza mare a cazanului și cu înălțimea egală cu a cazanului. Cât cântărește zidăria, dacă 1 m^3 de zidărie are masa 2,5 t?



10. Într-un trunchi de con aria totală este egală cu dublul ariei laterale, iar raza bazei mici este jumătate din raza bazei mari. Știind că aria secțiunii axiale este 144 cm^2 , calculează aria totală și volumul trunchiului de con.

★★★★

11. În imagine este reprezentat un munte având forma unui trunchi de con, cu diametrele bazelor 4 km, respectiv 2 km și înălțimea 2820 m. Trebuie construit un drum dintr-un punct al bazei mari până în vârful opus acestuia într-o secțiune axială. Care este cea mai mică lungime posibilă a acestui drum? Folosește aproximările $\sqrt{2} \approx 1,41$, $\sqrt{3} \approx 1,73$.



●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A

Un trunchi de con are aria totală $57\pi \text{ cm}^2$, iar razele bazelor sunt 5 cm, respectiv 2 cm. Calculează generatoarea trunchiului de con.

B

Un trunchi de con are raza bazei mari 8 cm, generatoarea 6 cm, iar aceasta formează un unghi de 60° cu planul bazei mari. Calculează aria totală și volumul trunchiului de con.

C

$ABCD$ este o secțiune axială a unui trunchi de con cu generatoarea și raza bazei mari egale cu 6 cm. Notăm O centrul bazei mari. Conul cu vârful în O și aceeași bază cu baza mică a trunchiului are generatoarea CO paralelă cu AD . Calculează aria laterală și volumul trunchiului de con.



O situație-problemă

Mergând la piață, Liza a văzut la un țăran două grămezi cu mere, mici și mari, pe care le vindea fără să le cântărească, la înțelegere cu cumpărătorul. Cu o sumă oarecare, Liza a cumpărat 8 mere mari, dar între timp s-a răzgândit și a cerut vânzătorului ca, pentru aceeași sumă, să-i dea mere mici. În absența unui cântar, Liza a măsurat cu o riglă gradată și a constatat că merele mici aveau diametrul aproximativ 6 cm, iar cele mari 9 cm. Câte mere mici ar fi rezonabil să primească?

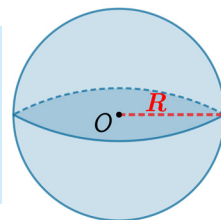


Vrem să știm!

Cum putem afla volumul și aria unei sfere?

Definiție

Se poate spune că sfera reprezintă în spațiu ceea ce reprezintă cercul în plan. Mai precis, dacă O este un punct în spațiu și R un număr real pozitiv, prin **sferă de centru O și rază R** înțelegem mulțimea punctelor din spațiu aflate la distanța R de punctul O .



1. Cum determinăm aria unei sfere?

Să explorăm

Teoremă Aria unei sfere cu raza R este $A = 4\pi R^2$.

Vom schița o demonstrație care, chiar dacă nu este foarte riguroasă, ne va permite să înțelegem modul în care a fost dedusă această formulă. Pentru început, o remarcă: *suprafața unei sfere nu se poate desfășura pe un plan.*

Dacă secționăm sfera cu două plane paralele, obținem două cercuri, ale căror centre sunt notate în figură Q și S , având ca raze QA și SB . Observăm trunchiul de con care are ca baze cele două cercuri. Notăm C mijlocul lui AB și D mijlocul lui QS . În trapezul $QABS$, CD este linie mijlocie, deci $QA + SB = 2 \cdot CD$. Aria laterală a acestui trunchi este $A_l = \pi \cdot AB \cdot (QA + SB) = 2\pi \cdot AB \cdot CD$.

Notăm E piciorul perpendicularei din B pe QA . Conform criteriului UU de asemănare, $\triangle EBA \sim \triangle DCO$ (explică de ce!), așadar $\frac{AB}{OC} = \frac{BE}{CD}$, de unde $AB \cdot CD = BE \cdot OC$. Pentru aria laterală a trunchiului de con considerat obținem $A_l = 2\pi \cdot BE \cdot OC = 2\pi \cdot QS \cdot OC$.

Acum, să ne imaginăm că sfera este secționată cu foarte multe plane paralele, la distanțe foarte mici între ele. Ariile laterale ale trunchiurilor formate vor aproxima aria sferei. Când distanța dintre aceste plane este foarte mică, OC aproximează raza sferei, iar suma înălțimilor trunchiurilor va fi egală cu $2R$.

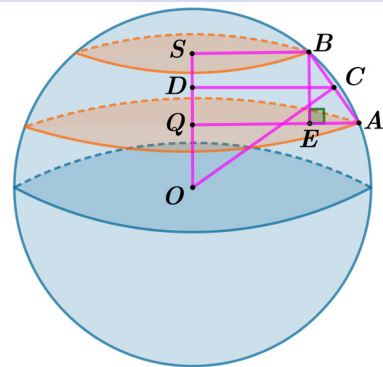
Obținem

$$A_{\text{sferă}} = 2\pi \cdot 2R \cdot R = 4\pi R^2.$$

Exemplu: Aria unei sfere cu raza 10 cm este

$$A = 4\pi R^2 = 4\pi 10^2 = 400\pi \text{ cm}^2. \text{ Folosind aproximarea } \pi \approx 3,14 \text{ rezultă}$$

$$A \approx 400 \cdot 3,14 = 1256 \text{ cm}^2.$$

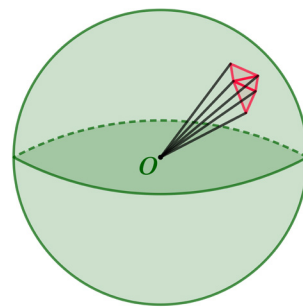


→ 2. Cum determinăm volumul unei sfere?



●●●● ▷ Să explorăm

Vom deduce acum o formulă pentru calcularea volumului sferei. Ne imaginăm că sfera este împărțită în foarte multe piramide care au vârfurile în centrul sferei și bazele pe suprafața sferei. Suma volumelor acestor piramide va aproxima volumul sferei. Când aceste piramide sunt foarte multe, înălțimile lor aproximează raza sferei, iar suma ariilor bazelor lor aproximează aria sferei. Notând $A_1, A_2, \dots$ ariile bazelor acestor piramide, avem:



$$V_{sfera} = V_1 + V_2 + \dots = \frac{A_1 \cdot R}{3} + \frac{A_2 \cdot R}{3} + \dots = \frac{R \cdot (A_1 + A_2 + \dots)}{3} = \frac{R \cdot A_{sfera}}{3} = \frac{R \cdot 4\pi R^2}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Așadar, **volumul sferei** este $V_{sfera} = \frac{4\pi R^3}{3}$.

Exemplu: Volumul unei sfere cu raza 3 cm este $V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 3^3}{3} = 36\pi \text{ cm}^3$. Rezultă $V \approx 113,04 \text{ cm}^3$.

●●●● ▷ Exprimare orală

Explică de ce, conform opiniei tale, modul de deducere a formulelor pentru calculul ariei și volumului sferei nu este pe deplin riguros din punct de vedere matematic.

●●●● ▷ Rezolvăm situația-problemă

Un măr mare are volumul $V_M = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^3 = \frac{243\pi}{2} \text{ cm}^3$,

iar unul mic $V_m = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot 3^3 = 36\pi \text{ cm}^3$. Înseamnă că 8 mere mari au volumul

$$8 \cdot \frac{243\pi}{2} = 972\pi \text{ cm}^3, \text{ deci numărul merelor mici care au același volum este } \frac{972\pi}{36\pi} = 27.$$

Observă că raportul volumelor a două sfere este cubul raportului razelor lor. Folosește observația pentru a rezolva altfel situația-problemă.



●●●● ▷ Evaluăm nivelul de bază

1. O sferă are raza 2 cm. Cu cât este egală aria sferei?
2. Calculează volumul unei sfere care are raza 1 m.

●●●● ▷ Problemă rezolvată

O sferă cu aria $100\pi \text{ cm}^2$ se secționează cu un plan aflat la 3 cm de centrul sferei. Află aria secțiunii.

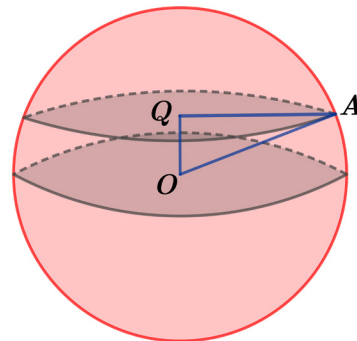
Rezolvare:

Secțiunea este un cerc. Notăm Q centrul acestuia. Calculăm raza sferei:
 $4\pi R^2 = 100\pi \Rightarrow R = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}.$

Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle OQA$, dreptunghic în Q :

$$QA^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow QA = 4 \text{ cm}.$$

Aria secțiunii va fi $A_{cerc} = \pi \cdot QA^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi \text{ cm}^2$.



●●●●▷ **Probleme propuse**

1. Calculează aria, respectiv volumul unei sfere cu raza de 4 cm.

2. Datele din tabel se referă la o sferă. Copiază tabelul în caiet și completează spațiile libere cu răspunsurile corecte.

	R	A	V
1.	2		
2.		10π	
3.			36π

3. Aria unei sfere este $144\pi \text{ cm}^2$. Calculează:

- a) volumul sferei;
b) aria unui cerc mare al sferei (cu raza egală cu raza sferei).

4. Într-o cutie de formă cilindrică cu diametrul bazei de 5 cm și înălțimea de 16 cm se pun trei mingi de tenis cu diametrul de 5 cm. Se va închide capacul cutiei?

★★

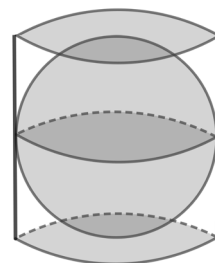
5. Într-o roșie sferică cu diametrul 10 cm poate fi introdusă complet o scobitoare de 8 cm, astfel încât să se afle la 3 cm de centrul roșiei?

6. O sferă cu volumul de $288\pi \text{ cm}^3$ se secționează cu un plan ce se află la distanța de 1 cm de centrul sferei. Determină aria secțiunii.

7. Un glob de sticlă are diametrul 20 cm. Patru astfel de globuri se ambalează într-o cutie cilindrică cu raza 10 cm și înălțimea 80 cm, iar în golurile rămase se pune rumeguș. Ce volum are rumegușul necesar?

i

8. O legendă spune că pe mormântul lui Arhimede a fost gravat desenul din imaginea alăturată, care reprezintă o sferă aflată în interiorul unui cilindru. Raza sferei este egală cu raza bazei cilindricului, iar înălțimea cilindricului este egală cu diametrul sferei. Arhimede a demonstrat că aria sferei este egală cu aria laterală a cilindricului. Demonstrează și tu!



★★★

9. Dintr-un cartof sferic cu diametrul 7 cm se taie cubulețe cu muchia 1 cm. Arată că se obțin cel puțin 64 astfel de cubulețe.

10. Un con cu înălțimea 8 cm are vârful și baza pe o sferă cu raza 6 cm. Calculează aria totală și volumul conului.

11. O portocală are formă sferică. Diametrul exterior este 6 cm, iar coaja are grosimea 6 mm. Cât la sută din volumul portocalei reprezintă coaja?

12. Dacă 27 de biluțe sferice de ciocolată, cu diametrul 8 mm, s-ar topi pentru a forma o singură bilă mai mare, ce diametru ar avea aceasta?

★★★★

13. Punctele M, N, P aparțin unei sfere și determină un triunghi echilateral de latură $6\sqrt{3} \text{ cm}$. Calculează volumul sferei știind că distanța de la centrul sferei la planul (MNP) este de 8 cm.

14. Pe suprafața unei sfere cu raza 1 se consideră 9 puncte. Demonstrează că există 2 dintre aceste puncte între care distanța este cel mult $\sqrt{2}$.

15. O prismă patrulateră regulată cu diagonala unei fețe $3\sqrt{13} \text{ cm}$ are toate vârfurile pe o sferă cu raza 6 cm. Calculează aria totală și volumul prisme.

16. Dintr-o bucată de lemn de formă cubică, se strunjește un corp de formă sferică. Arată că în sfera astfel obținută este mai puțin de 53% din lemnul inițial.

●●●●▷ **Alege și rezolvă în 5 minute!**

A

Sunt suficiente 150 g vopsea pentru vopsirea unei geamanduri sferice cu diametrul 1 m, dacă se folosesc 50 g pentru 1 m^2 ?

B

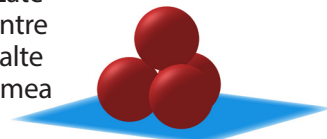
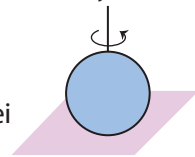
Știind că Pământul are diametrul de 3,6 ori mai mare decât diametrul Lunii, determină aproximativ de câte ori este mai mare aria Pământului decât aria Lunii.

C

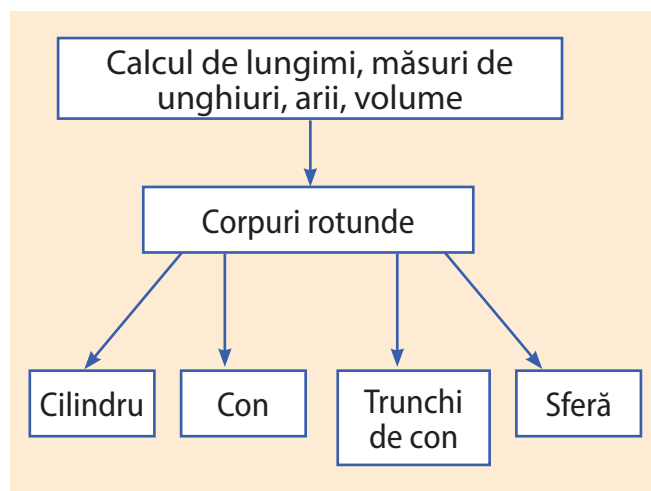
Într-un punct al unei sfere sunt concurente trei coarde egale cu 12 cm, care formează două câte două unghiuri cu măsura 60° . Calculează raza sferei.



1. O este centrul unei baze a unui cilindru, iar AA' este o generatoare, $AA' = 12$ cm, iar distanța de la A la dreapta $A'O$ este de 6 cm. Calculează aria totală și volumul cilindrului.
2. La turnarea unei bile din sticlă s-a format, în interiorul acesteia, o bulă de aer de formă sferică cu raza de 2 cm. Aria bilei este 100π cm². Cât este volumul sticlei utilizate?
3. Raportul razelor a două sfere este $2/3$. Calculează raportul volumelor sferelor.
4. Un dop de cauciuc are forma unui trunchi de con, cu diametrele bazelor 30 mm, respectiv 16 mm și aria laterală 575π mm². Cât este volumul dopului?
5. O minge uzată de cauciuc, cu diametrul 14 cm, este tăiată în două bucăți egale. Poți pune un litru de apă într-una dintre aceste bucăți?
6. Într-un butoi cilindric cu înălțimea 1,6 m, plin cu vin, se află 1256 l vin. Ce distanță parcurge acest butoi dacă este rostogolit de 5 ori? Folosește aproximarea $\pi \approx 3,14$.
7. O picătură de apă are formă aproximativ sferică, cu diametrul 4 mm. Câte astfel de picături vor umple un pahar cilindric cu diametrul bazei 8 cm și înălțimea 12 cm?
8. Calculează masa unei bile de la jocul de popice, știind că bila are raza de 15 cm și că este făcută din lemn de fag. (Densitatea fagului este $\rho = 0,8$ g/cm³).
9. Masa cojilor unui pepene este direct proporțională cu suprafața acestora. Forma pepenelui ne permite să-l aproximăm la o sferă. Ce este mai avantajos să cumpărăm: un pepene de 10 kg sau doi pepeni de câte 5 kg?
10. O prismă patrulateră regulată de lemn, având latura bazei 4 cm și înălțimea 2 cm, a fost obținută prin strunjire dintr-o sferă, cu pierdere minimă de material. Ce arie și ce volum avea sfera?
11. Dacă un dreptunghi $ABCD$ se rotește în jurul laturii AB se obține un corp cu volumul 18π cm³, iar dacă se rotește în jurul lui BC , corpul obținut are volumul 12π cm³. Cu cât sunt egale ariile laterale ale corpurilor obținute în fiecare dintre cele două situații?
12. Așezând vertical pe o masă o monedă și lovind una dintre marginile monedei, aceasta se rotește câteva secunde și generează astfel o sferă. Calculează volumul acestei sfere, făcând măsurătorile necesare pe o monedă aleasă de tine.
13. Două coarde ale unei sfere au lungimile 12 cm, respectiv 30 cm. Distanța de la centrul sferei la coarda mai lungă este 10 cm. Calculează:
 - a) aria sferei;
 - b) distanța de la centrul sferei la cealaltă coardă.
14. Mati stă pe întuneric într-o cameră în formă de cub cu muchia de 4 m, exact în centrul pătratului ce reprezintă podeaua. În mână, la 1 m de podea, ține o lanternă pe care o îndreaptă spre tavan, perpendicular pe acesta. Fasciculul de lumină are forma unui con cu unghiul de la vârful secțiunii axiale de 60° .
 - a) Ce suprafață din tavan este luminată?
 - b) Dacă în cameră zboară un țânțar, care este probabilitatea ca, atunci când Mati aprinde lanterna, țânțarul să se afle în zona luminată?
15. Ai 150 m de sârmă de cupru cu diametrul 1 mm. O mototolești cu toată puterea pentru a face un ghem sferic. Arată că oricât ai strânge, acest ghem nu poate avea diametrul mai mic de 6 cm.
16. **Investigație** Caută cât mai multe argumente care dovedesc forma aproximativ sferică a Pământului. Elaborează un material cu acest conținut și dă-i o formă cât mai apropiată de un articol științific.
17. Cele patru mingi din figura alăturată au razele de 10 cm și sunt așezate astfel încât fiecare dintre ele le atinge pe celelalte trei. Calculează înălțimea întregii construcții.



Ce am învățat?



●●●●▷ Rezolv testele pentru a verifica dacă pot:

- să calculez aria laterală sau totală și volumul unui cilindru, con, trunchi de con sau sferă;
- să aplic relațiile metrice din geometria plană în cazul configurațiilor existente în corpurile rotunde;
- să determin elemente ale corpurilor geometrice rotunde cunoscând aria laterală sau totală și volumul;
- să calculez unghiuri și distanțe în interiorul sau pe suprafața unor corpuri rotunde;
- să modelez matematic situații practice.

Utilizează schema de mai sus și adaugă în portofoliu elementele esențiale din lecțiile unității 8, referitoare la conceptele menționate.

●●●●▷ Testul 1

1. Calculează aria totală și volumul unui con care are înălțimea 3 cm și generatoarea 6 cm.
2. Câți litri de apă trebuie să turnăm într-o oală cilindrică, cu diametrul 20 cm, pentru ca apa să atingă înălțimea de 20 cm? Folosește aproximarea $\pi \approx 3,14$.
3. Un sector circular cu măsura arcului 270° și raza 9 m se înfășoară pentru a forma suprafața laterală a unui con. Calculează aria totală și volumul acestui con.
4. Un număr de 16 sfere verzi, identice, au suma ariilor egală cu aria unei sfere galbene. Câte sfere verzi au volumul egal cu volumul unei sfere galbene?
5. Dacă se secționează un con cu un plan paralel cu baza, ce trece prin mijlocul înălțimii, aria secțiunii este $16\pi \text{ cm}^2$, iar dacă se secționează cu un plan prin vârful conului, perpendicular pe planul bazei, aria secțiunii este 48 cm^2 . Calculează aria totală și volumul conului.

●●●●▷ Testul 2

1. Cupola unei clădiri are forma unei jumătăți de sferă cu raza 10 m. Ce suprafață are cupola?
2. Pentru a confecționa partea laterală a unui rezervor cilindric cu diametrul de 2 m s-a folosit o bucată dreptunghiulară de tablă cu aria 10 m^2 . Câți litri de lichid încap în acest rezervor?
3. Un trunchi de con are înălțimea 6 cm, raza bazei mici 4 cm și generatoarea 10 cm. Calculează aria totală și volumul conului din care provine acest trunchi.
4. Dintr-o piesă uzată în formă de piramidă patrulateră regulată, cu latura bazei 12 cm și apotema 10 cm, s-a confecționat o bilă sferică de volum maxim. Calculează aria și volumul bilei.
5. Un mușuroi de pământ are forma unui con cu diametrul bazei 0,8 m și volumul $50,24 \text{ dm}^3$. O furnică se află în centrul bazei. Arată că drumul cel mai scurt pe care furnica poate să iasă din mușuroi nu depășește 24 cm. Folosește aproximarea $\pi \approx 3,14$.

TESTUL 1*

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timpul de lucru efectiv este de două ore.

SUBIECTUL I – Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

5p 1. Rezultatul calculului $3 + 309 : 3$ este:

- a) 14 b) 104 c) 16 d) 106

5p 2. Dacă $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$, unde a și b sunt numere reale pozitive, atunci $\frac{3a+b}{a+2b}$ este egal cu:

- a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{9}{8}$ c) $\frac{4}{3}$ d) 1

5p 3. Dacă 80% din a este egal cu b și $x\%$ din b este egal cu a , atunci numărul x este egal cu:

- a) 120 b) 180 c) 125 d) 100

5p 4. Cardinalul mulțimii $(1 - 3\sqrt{2}; 4 + 3\sqrt{2}) \cap \mathbb{Z}$ este:

- a) 5 b) 12 c) 9 d) 14

5p 5. Eva, Radu, Mara și Geo au avut de calculat $4\sqrt{18} - 2\sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{32}$.

Ei au obținut rezultatele din tabelul alăturat.

Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect este:

- a) Eva b) Radu c) Mara d) Geo

Eva	Radu	Mara	Geo
$4\sqrt{28}$	$2\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$9\sqrt{2}$

5p 6. Adunând cel mai mare divizor comun al numerelor 12 și 16 cu cel mai mic multiplu comun al lor, obținem:

- a) 52 b) 28 c) 48 d) 100

SUBIECTUL al II-lea – Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

5p 1. În figura alăturată este reprezentat segmentul AB , având lungimea de 60 mm.

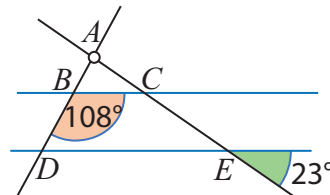


Punctele C și D sunt alese astfel încât $\frac{CA}{CB} = \frac{1}{3}$ și $\frac{DB}{DA} = \frac{2}{3}$. Lungimea segmentului CD este:

- a) 20 mm b) 36 mm c) 30 mm d) 21 mm

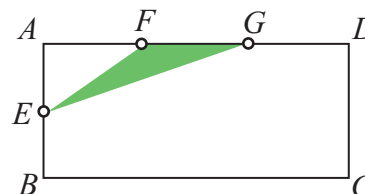
5p 2. În figura alăturată, $BC \parallel DE$. Conform măsurilor de unghiuri, indicate pe figură, măsura unghiului DAE este:

- a) 85° b) 72° c) 90° d) 49°



5p 3. În figura alăturată, $ABCD$ este un dreptunghi cu aria de 12 cm^2 , punctul E este mijlocul segmentului AB , iar segmentele AF , FG și GD sunt congruente. Atunci aria triunghiului EFG este egală cu:

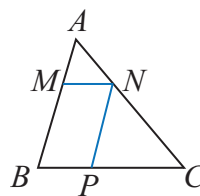
- a) 12 cm^2 b) 3 cm^2 c) $2,5 \text{ cm}^2$ d) 1 cm^2



* Testul poate fi abordat la finalul Modulului 1.

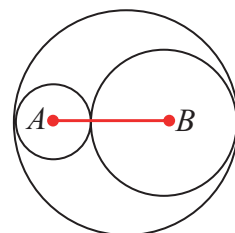
- 5p** 4. În figura alăturată, $MN \parallel BC$ și $NP \parallel AB$.
Dacă $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$, atunci raportul $\frac{CP}{BC}$ este egal cu:

- a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{5}$



- 5p** 5. În imaginea alăturată apar trei cercuri, care sunt două câte două tangente. Distanța dintre centrele a două dintre aceste cercuri este $AB = 4$ cm. Suma lungimilor razelor tuturor celor trei cercuri este:

- a) 16 cm b) 12 cm c) 8 cm d) 4 cm



- 5p** 6. Radu spune că, dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, atunci dreapta este paralelă cu orice dreaptă din acel plan. Afirmatia lui Radu este:

- a) Adevărată b) Falsă

SUBIECTUL al III-lea – Scrie rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. Liza a ales un număr, l-a înmulțit cu 6, a adunat 7 la rezultatul obținut și, după ce a împărțit suma la 5, a obținut numărul 41.

- 2p** a) Decide dacă numărul ales de Liza ar putea fi 43. Justifică răspunsul.

- 3p** b) Calculează numărul ales de Liza.

2. Se consideră numerele $x = 2^{35} : 4^{10} + 2^{15}$ și $y = \sqrt{2^{30} + 2^{33}}$.

- 2p** a) Arată că $x = 2^{16}$.

- 3p** b) Demonstrează că $x + y$ este un număr natural, divizibil cu 5.

3. Considerăm mulțimea $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } |1 - 2x| \leq 3\}$.

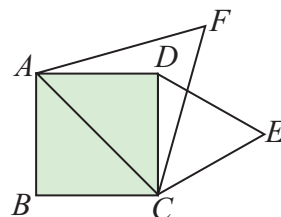
- 2p** a) Demonstrează că $\sqrt{2} \in A$.

- 3p** b) Explicitează mulțimea $A \cap \mathbb{Z}$, enumerând elementele acestei mulțimi.

4. În figura alăturată sunt reprezentate pătratul $ABCD$ și triunghiurile echilaterale CDE și ACF .

- 2p** a) Determină măsura unghiului ECF .

- 3p** b) Demonstrează că triunghiurile CEF și ABC sunt congruente.

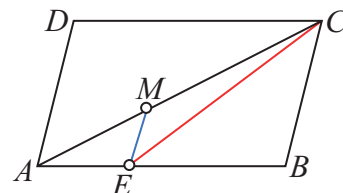


5. În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$, cu latura AB de 10 cm și latura BC de 6 cm. Punctul M se află pe

diagonala AC , astfel încât $\frac{MA}{MC} = \frac{2}{3}$, iar $ME \parallel BC$, $E \in AB$.

- 2p** a) Arată că lungimea segmentului AE este 4 cm.

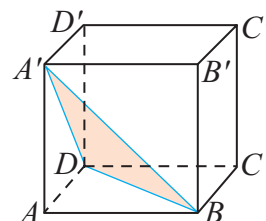
- 3p** b) Demonstrează că semidreapta CE este bisectoarea unghiului BCD .



6. În cubul $ABCD A'B'C'D'$, aria unei fețe este 36 cm^2 .

- 2p** a) Arată că aria triunghiului $A'BD$ este $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

- 3p** b) Demonstrează că $A'C'BD$ este un tetraedru regulat.



TESTUL 2*

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

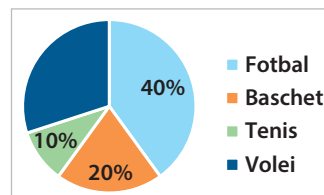
Timpul de lucru efectiv este de două ore.

SUBIECTUL I – Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

- 5p** 1. Rezultatul calculului $1 + 3^2$ este:
a) 8 b) 16 c) 7 d) 10
- 5p** 2. Dacă numărul a reprezintă 60% din numărul b , atunci $\frac{a}{a+b}$ este egal cu:
a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 60
- 5p** 3. Soluția ecuației $\frac{1}{2} - x = \frac{1}{3}$ este:
a) 0 b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $-\frac{2}{5}$
- 5p** 4. Ana spune că $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 = 5 - 2$. Afirmția Anei este:
a) Adevărată b) Falsă
- 5p** 5. Lia, Dan, Ana și Geo au avut de calculat media aritmetică a numerelor 3,2; 5,5 și 8,1. Ei au obținut rezultatele din tabelul alăturat. Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect este:
a) Lia b) Dan c) Ana d) Geo
- 5p** 6. Diagrama arată situația procentuală a înscrierilor la clubul de sport. Dacă la secția de fotbal sunt înscriși 60 de sportivi, atunci, conform datelor de pe figură, numărul sportivilor înscriși la volei este:
a) 30 b) 45 c) 60 d) 100

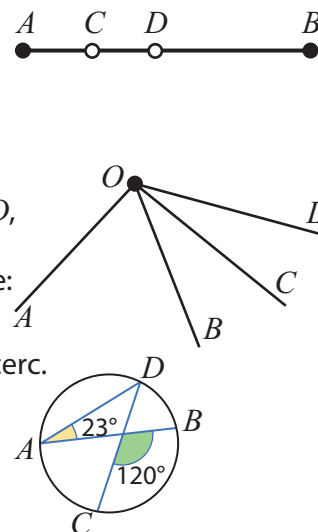
Lia	Dan	Ana	Geo
8,4	16,8	5,6	4,2



SUBIECTUL al II-lea – Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

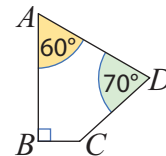
- 5p** 1. În figura alăturată, punctul C este mijlocul segmentului AD , iar punctul D este mijlocul segmentului AB . Dacă lungimea segmentului BC este x , atunci lungimea segmentului AB este:
a) $2x$ b) $\frac{4x}{3}$ c) $\frac{3x}{2}$ d) $3x$
- 5p** 2. În figura alăturată, semidreapta OB este bisectoarea unghiului AOD , iar semidreapta OC este bisectoarea unghiului BOD . Dacă $\angle BOC$ are măsura de 25° , atunci măsura suplementului unghiului AOD este:
a) 80° b) 100° c) 155° d) 105°
- 5p** 3. În figura alăturată sunt reprezentate coardele AB și CD ale unui cerc. Unghiurile marcate pe figură au măsurile de 23° , respectiv 120° . Măsura arcului mic $\widehat{AC}$ al cercului este:
a) 23° b) 37° c) 74° d) 60°



* Testul poate fi abordat la finalul Modulului 2.

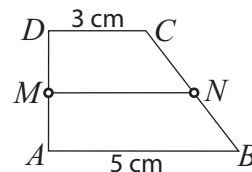
- 5p** 4. În figura alăturată a fost desenat patrulaterul convex $ABCD$. Conform datelor de pe figură, măsura unghiului $\angle BCD$ este:

a) 140° b) 130° c) 120° d) 100°



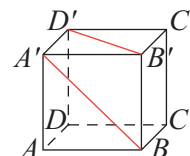
- 5p** 5. În figura alăturată a fost reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$ și linia mijlocie MN a acestuia. Dacă bazele trapezului au dimensiunile de 3 cm și 5 cm, iar aria trapezului este de 16 cm^2 , atunci aria patrulaterului $ABMN$ este:

a) 8 cm^2 b) 9 cm^2 c) 12 cm^2 d) 15 cm^2



- 5p** 6. În imaginea alăturată apare cubul $ABCD A'B'C'D'$. Măsura unghiului dintre dreptele BA' și $B'D'$ este:

a) 90° b) 60° c) 45° d) 30°



SUBIECTUL al III-lea – Scrie rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 1.** Doi frați, Dan și Radu, au împreună 240 de lei. Dacă Dan i-ar da 10 lei lui Radu, atunci el ar avea de două ori mai mulți bani decât fratele său.

2p a) Verifică dacă Dan ar putea avea 150 de lei.

3p b) Determină suma de bani pe care o are Radu.

- 2.** Se consideră intervalul $I = (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$.

2p a) Demonstrează că mulțimea $I \cap \mathbb{Z}$ are 3 elemente.

3p b) Calculează pentru câte numere întregi n , mulțimea $I \cup (n; n+1)$ este un interval.

- 3.** Se consideră expresia $E(x) = 2(2x+1)^2 - (x-2)^2 - (3x-1)(3x+1) + (2x-6)(x-1)$.

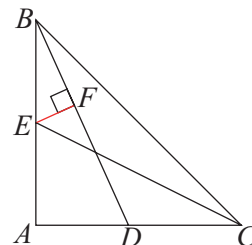
2p a) Demonstrează că $E(x) = 4x + 5$.

3p b) Determină toate numerele întregi a pentru care $|E(a)| \leq 7$.

- 4.** În triunghiul dreptunghic isoscel din figura alăturată, în care $AB = AC = 4 \text{ cm}$, BD și CE sunt mediane, iar $EF \perp BD$, $F \in BD$.

2p a) Demonstrează că lungimea segmentului BD este $2\sqrt{5} \text{ cm}$.

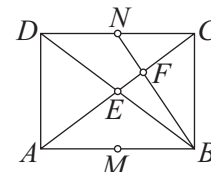
3p b) Calculează lungimea segmentului FD .



- 5.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$, cu laturile $AD = 9 \text{ cm}$ și $AB = 12 \text{ cm}$. Punctele M și N sunt mijloacele laturilor AB și CD , E este intersecția diagonalelor dreptunghiului, iar $\{F\} = BN \cap AC$.

2p a) Arată că lungimea segmentului EF este de 2,5 cm.

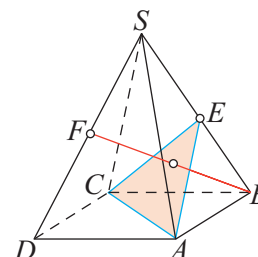
3p b) Calculează aria patrulaterului $BFEM$.



- 6.** În figura alăturată a fost reprezentată piramida patrulateră regulată $SABCD$, în care triunghiul SAC este echilateral. Punctele E și F sunt mijloacele muchiilor SB , respectiv SD .

2p a) Demonstrează că $SD \parallel (ACE)$

3p b) Arată că $FB \perp (ACE)$.



TESTUL 3*

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timpul de lucru efectiv este de două ore.

SUBIECTUL I – Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

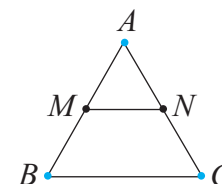
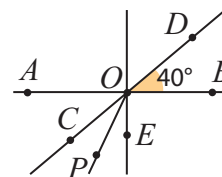
- 5p** 1. Rezultatul calculului $19 - 3 \cdot (8 - 2)$ este:
a) -1 **b)** 0 **c)** 1 **d)** 37
- 5p** 2. Dintre numerele $a = 1,5$, $b = 1,55$, $c = 1,(5)$ și $d = 1,45$ cel mai mic este:
a) a **b)** b **c)** c **d)** d
- 5p** 3. Dacă 8 reprezintă $x\%$ din 32, atunci numărul x este egal cu:
a) 4 **b)** 25 **c)** 40 **d)** 50
- 5p** 4. Soluția ecuației $3(x + 1) - 1 = -7$ este:
a) -3 **b)** $-\frac{7}{3}$ **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** 3
- 5p** 5. Tic, Nic, Ada și Ana au calculat media geometrică a numerelor $a = \sqrt{3}(\sqrt{5} + 2)$ și $b = \sqrt{12}(\sqrt{5} - 2)$ și au scris rezultatele în tabelul alăturat. Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect este:
a) Tic **b)** Nic **c)** Ada **d)** Ana
- 5p** 6. Intersecția intervalelor $(-3; 2)$ și $[-4; 0]$ conține elementul:
a) -4 **b)** -3 **c)** 0 **d)** 1

Tic	Nic	Ada	Ana
$\sqrt{6}$	6	12	3

SUBIECTUL al II-lea – Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

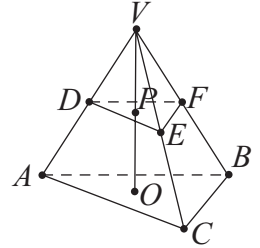
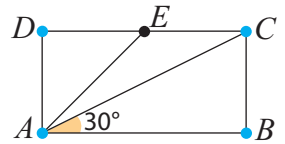
(30 de puncte)

- 5p** 1. În figura alăturată, punctele A , B și C sunt coliniare, M este mijlocul segmentului BC , $AB = \frac{1}{4}BC$ și $AM = 15$ cm. Lungimea segmentului CM este:
a) 5 cm **b)** 10 cm **c)** 15 cm **d)** 25 cm
- 5p** 2. În figura alăturată, dreptele AB și CD sunt concurente în punctul O , $\sphericalangle BOD = 40^\circ$, $OE \perp AB$ și OP este bisectoarea unghiului COE . Măsura unghiului POB este de:
a) 20° **b)** 25° **c)** 115° **d)** 130°
- 5p** 3. În figura alăturată, triunghiul ABC este echilateral, cu aria de $9\sqrt{3}$ cm² și MN este linie mijlocie. Lungimea segmentului MN este egală cu:
a) 3 cm **b)** 6 cm **c)** 9 cm **d)** 18 cm



* Testul poate fi abordat la finalul Modulului 3.

- 5p** 4. În figura alăturată, $ABCD$ este dreptunghi, E este mijlocul laturii CD și $AB = 2\sqrt{3}$ cm. Aria triunghiului AEC este egală cu:
a) $\sqrt{3}$ cm² **b)** $2\sqrt{3}$ cm² **c)** $3\sqrt{3}$ cm² **d)** $4\sqrt{3}$ cm²
- 5p** 5. Un cerc are lungimea de 16π cm. Perimetrul triunghiului isoscel înscris în cerc, care are baza un diametru al cercului este:
a) 16 cm **b)** 32 cm **c)** $8(1 + \sqrt{2})$ cm **d)** $16(1 + \sqrt{2})$ cm
- 5p** 6. Piramida $VABC$ din figura alăturată este secționată cu un plan paralel cu baza, ce trece prin mijlocul înălțimii piramidei. Secțiunea este un triunghi echilateral cu latura de 6 cm. Aria bazei piramidei $VABC$ este:
a) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm² **b)** $12\sqrt{3}$ cm² **c)** $36\sqrt{3}$ cm² **d)** $72\sqrt{3}$ cm²



SUBIECTUL al III-lea – Scrie rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 1.** Tic are de rezolvat un număr de probleme în 3 zile. În prima zi rezolvă 30% din temă, a doua zi o pătrime din aceasta, iar a treia zi restul de 9 probleme.
- 2p** **a)** Decide dacă numărul de probleme rezolvate de Tic în prima zi este mai mic decât cel rezolvat de el a doua zi. Justifică răspunsul.
- 3p** **b)** Determină numărul total de probleme din tema lui Tic.
- 2.** Considerăm numerele reale $a = \sqrt{(-2)^2} + \sqrt{(2\sqrt{3} + 1)^2} - |1 - \sqrt{12}|$ și
- $$b = \left(\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6} + 2} \right)^{-1}.$$
- 2p** **a)** Arată că numărul a este întreg.
- 3p** **b)** Demonstrează că $a = b^2$.
- 3.** Considerăm expresia algebrică $E(x) = (x + 1)^2 - (1 - 2x)^2 - 2 - x$, cu $x \in \mathbb{R}$.
- 2p** **a)** Demonstrează că $E(x) = (x - 1)(2 - 3x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 3p** **b)** Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $E(x) = E(0)$.
- 4.** Într-un trapez isoscel laturile neparalele sunt egale cu baza mică, segmentul determinat de diagonale pe linia mijlocie este $\frac{1}{3}$ din lungimea liniei mijlocii, iar baza mare are 20 cm.
- 2p** **a)** Demonstrează că diagonalele sunt bisectoare pentru unghiurile alăturate bazei mari.
- 3p** **b)** Demonstrează că diagonalele sunt perpendiculare pe laturile neparalele ale trapezului.
- 5.** Fie rombul $ABCD$ cu $AB = 18$ cm, punctul E situat pe segmentul CD astfel încât $CE = 16$ cm și $BE \cap AD = \{F\}$.
- 2p** **a)** Calculează lungimea segmentului DF .
- 3p** **b)** Determină raportul ariilor triunghiurilor FBA și BEC .
- 6.** O foaie de hârtie dreptunghiulară $ABCD$ cu $AB = 20$ cm și $BC = 15$ cm este îndoită după diagonală AC , astfel încât, după îndoire, $(DAC) \perp (ABC)$.
- 2p** **a)** Arată că tangenta unghiului format de planele (ABD) și (ABC) este egală cu $\frac{20}{9}$.
- 3p** **b)** Calculează distanța de la punctul D la dreapta AB .

TESTUL 4*

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timpul de lucru efectiv este de două ore.

SUBIECTUL I – Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

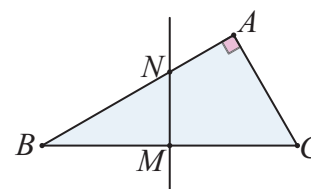
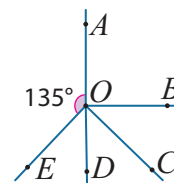
- 5p** 1. Rezultatul calculului $(111 - 222) : (-3)$ este:
a) 74 **b)** 37 **c)** 111 **d)** -37
- 5p** 2. Dacă a este număr real pozitiv și $\frac{2}{a} = \frac{a}{18}$, atunci $a + 6$ este egal cu:
a) 3 **b)** 9 **c)** 6 **d)** 12
- 5p** 3. Dacă $x = (-2)(-3)(-4)(+5)$ și $y = (+6)(-1)(+2)(-5)$, atunci:
a) $x = y$ **b)** $x < y$ **c)** $x > y$ **d)** $x = -y$
- 5p** 4. Numărul natural care aparține intervalului $(2\sqrt{3}; 3\sqrt{2})$ este:
a) 5 **b)** 4 **c)** 3 **d)** 16
- 5p** 5. Patru elevi au calculat media aritmetică a numerelor a^{-1} și b^{-1} pentru $a = 3 + 2\sqrt{2}$ și $b = 3 - 2\sqrt{2}$. Ei au obținut rezultatele din tabelul alăturat. Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect este:
a) Dana **b)** Bogdan **c)** Ioana **d)** Ștefan
- 5p** 6. Produsul a două numere naturale este egal cu 9375, iar cel mai mare divizor comun al acestora este 25. Enunțul „Cel mai mic multiplu comun al celor două numere este 375” este:
a) adevărat **b)** fals

Dana	Bogdan	Ioana	Ștefan
6	$4\sqrt{2}$	3	$3\sqrt{2}$

SUBIECTUL al II-lea – Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

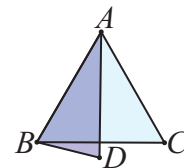
(30 de puncte)

- 5p** 1. În figura alăturată punctele A, C, M, B, N sunt coliniare în această ordine astfel încât $AM = 4 \cdot AC$, M este mijlocul lui AB , iar N este simetricul lui M față de B . Dacă $AC = 2$ cm, atunci lungimea segmentului BN este egală cu:
a) 2 cm **b)** 4 cm **c)** 6 cm **d)** 8 cm
- 5p** 2. În figura alăturată, $OB \perp OA$, OD și OA sunt semidrepte opuse, OC este bisectoarea unghiului BOD și $\angle AOE = 135^\circ$. Măsura unghiului EOC este:
a) 85° **b)** 75° **c)** 90° **d)** 45°
- 5p** 3. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC dreptunghic în A cu măsura unghiului B de 30° . MN este mediatoarea segmentului BC și $AC = 3$ cm. Lungimea lui AN este egală cu:
a) 6 cm **b)** 3 cm **c)** $\sqrt{3}$ cm **d)** $2\sqrt{3}$ cm

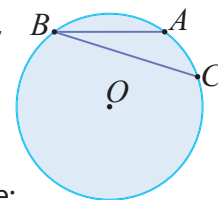


* Testul poate fi abordat la finalul Modulului 4.

- 5p** 4. În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral ABC cu aria de $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Triunghiul ABD este isoscel cu baza BD și $\angle BAD = 30^\circ$. Aria triunghiului ABD este egală cu:



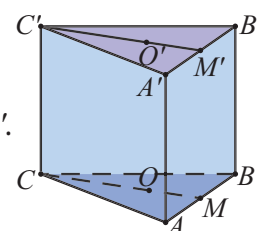
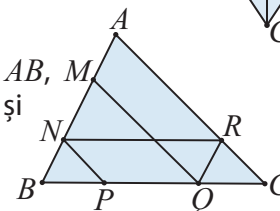
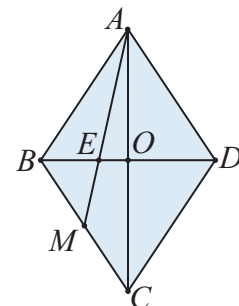
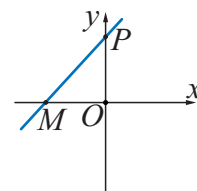
- a) 4 cm^2 b) $\sqrt{3} \text{ cm}^2$ c) 16 cm^2 d) $2\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- 5p** 5. În figura alăturată AB , BC sunt laturi pentru un hexagon regulat, respectiv pătrat înscrise în același cerc de centru O . Măsura arcului AC este egală cu:
- a) 75° b) 30° c) 60° d) 45°
- 5p** 6. Un elev afirmă că, dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan, atunci dreapta este perpendiculară pe orice dreaptă din acel plan. Afirmatia sa este:
- a) Adevărată b) Falsă



SUBIECTUL al III-lea – Scrie rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 1.** Se consideră trei numere naturale. Diferența dintre primul și al treilea este 36, câtul împărțirii numărului al doilea la numărul al treilea este 2 și restul 1, iar primul număr este de 6 ori mai mare decât diferența dintre al doilea și al treilea.
- 2p** a) Verifică dacă al treilea număr este cel mai mic. Justifică răspunsul.
- 3p** b) Determină cel mai mic dintre cele trei numere date.
- 2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.
- 2p** a) Arată că $f(-\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{2}) = -1$.
- 3p** b) Reprezentarea geometrică a graficului funcției f intersectează axele de coordonate în punctele M , respectiv P . Determină coordonatele punctului Q de pe axa Ox pentru care aria triunghiului MPQ este egală cu 1.
- 3.** Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{3}{x-1} - \frac{x}{x^2-1} - \frac{2x+6}{x^2+2x-3} \right) : \frac{3}{x^2-1}$, unde x este număr real, $x \neq \pm 1$, $x \neq -3$.
- 2p** a) Arată că $E(2) = \frac{1}{3}$.
- 3p** b) Arată că numărul $N = E(2) + E(3) + \dots + E(28)$ este pătrat perfect.
- 4.** În figura alăturată $ABCD$ este romb cu $\angle BAC = 30^\circ$, M este mijlocul lui BC , iar $EO = 2 \text{ cm}$.
- 2p** a) Arată că triunghiul ABD este echilateral.
- 3p** b) Determină perimetrul rombului.
- 5.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC , cu $M, N \in AB$, $M, P, Q \in BC$, $R \in AC$ astfel încât $PN \parallel AC$, $NR \parallel BC$, $RQ \parallel AB$ și $QM \parallel AC$, iar $PC = 3PB$.
- 2p** a) Arată că $NA = 3NB$.
- 3p** b) Demonstrează că $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QB}{QC} = 1$.
- 6.** În prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, aria totală este de patru ori mai mare decât aria bazei, $AB = 6 \text{ cm}$, O, O' sunt centrele cercurilor circumscrise bazelor și M, M' sunt mijloacele laturilor AB , respectiv $A'B'$.
- 2p** a) Arată că volumul prisme 27 cm^3 .
- 3p** b) Determină unghiul dreptelor MO' și AA' .



TESTUL 5*

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timpul de lucru efectiv este de două ore.

SUBIECTUL I – Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

- 5p** 1. Rezultatul calculului $4 : [4 \cdot (1:2)]$ este:
a) 0,5 b) 8 c) 2 d) 1
- 5p** 2. Cel mai mare număr natural prim din intervalul $(-\infty; 20\sqrt{2}]$ este egal cu:
a) 23 b) 29 c) 31 d) 37
- 5p** 3. Valoarea raportului numerelor $2^{100} + 2^{100}$ și $2^{100} + 2^{98}$ este egal cu:
a) 5 b) 1,6 c) 4 d) 2,5
- 5p** 4. Un robinet ar putea umple un bazin în 12 minute, iar alt robinet ar umple bazinul în 24 minute. Dacă funcționează ambele robinete, numărul minutelor în care se umple bazinul este egal cu:
a) 8 b) 18 c) 6 d) 9
- 5p** 5. Mia, Dan, Emil și Elena au avut de calculat produsul numerelor iraționale din mulțimea $\{-2\sqrt{27}; 4\sqrt{36}; -3\sqrt{12}; 5\sqrt{64}\}$. Ei au obținut rezultatele din tabelul alăturat. Dintre cei patru elevi, a obținut rezultatul corect:
a) Mia b) Dan c) Emil d) Elena

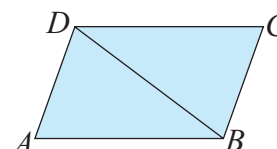
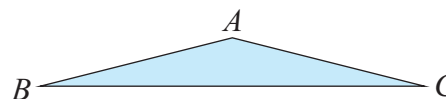
Mia	Dan	Emil	Elena
960	162	108	-720

- 5p** 6. Miruna afirmă că numărul $6^{20} - 3^{30}$ este pozitiv. Afirmatia Mirunei este:
a) Adevărată b) Falsă

SUBIECTUL al II-lea – Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

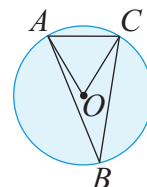
- 5p** 1. În figura alăturată, punctele A, B, C sunt coliniare astfel încât $AC = 4 \cdot BC$, $AB = k \cdot BC$. Numărul real k este egal cu:
a) 2,5 b) 2 c) 1,5 d) 3
- 5p** 2. În figura alăturată, $\angle BAC$ și $\angle DAB$ sunt suplementare, iar $\angle DAC = 116^\circ$. Unghiul $\angle BAD$ are măsura egală cu:
a) 64° b) 58° c) 44° d) 32°
- 5p** 3. În figura alăturată, $\triangle ABC$ are $AB = AC = 6\sqrt{3}$ cm, iar $\angle ABC = 15^\circ$. Aria triunghiului ABC este egală cu:
a) 27 cm^2 b) 54 cm^2 c) 36 cm^2 d) $13,5 \text{ cm}^2$
- 5p** 4. Paralelogramul $ABCD$ are $AB = BD$ și $\angle ADC = 106^\circ$. Unghiul $\angle ABD$ are măsura egală cu:
a) 32° b) 74° c) 37° d) 53°



* Testul poate fi abordat la finalul Modulului 5.

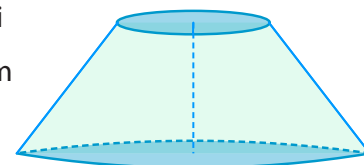
- 5p** 5. În figura alăturată, punctul O este centrul cercului, iar $\sphericalangle OAC = 56^\circ$. Unghiul $\sphericalangle ABC$ are măsura egală cu:

a) 36° b) 34° c) 28° d) 30°



- 5p** 6. Un trunchi de con circular drept are diametrele bazelor 12 cm și 6 cm, iar înălțimea 7 cm. Folosind aproximarea $\pi \approx \frac{22}{7}$, obținem pentru volumul acestui trunchi de con valoarea:

a) 512 cm^3 b) 324 cm^3 c) 462 cm^3 d) 488 cm^3



SUBIECTUL al III-lea – Scrie rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. Elevii unei școli au primit un test, notat cu note întregi de la 1 la 10. Toți elevii au fost prezenți, iar media pe școală a fost exact 7,35.

2p a) Școala poate avea 360 de elevi ?

- 3p** b) După un timp, elevii au primit alt test, la care din nou au fost prezenți toți elevii și media pe școală a fost exact 7,72. Află câți elevi are școala, știind că numărul lor este cuprins între 350 și 450.

2. Se consideră expresia $E(a) = \left(\frac{a^2 + 4}{a^2} - \frac{a^2}{a^2 - 4} \right) : \frac{8}{a^3 + 2a^2}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0; -2; 2\}$.

2p a) Arată că $E(a) = \frac{2}{2-a}$.

3p b) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $E(a) = 0,5$.

3. A și B sunt două rezervoare. În A se află 360 ℓ apă, iar în B se află 40 ℓ apă. În fiecare secundă, din A curg în B , constant, 3 ℓ apă. Rezervorul B are capacitatea cel puțin 400 ℓ .

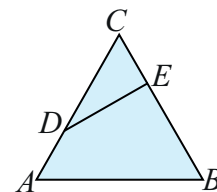
2p a) Definește funcția f care să exprime cantitatea de apă rămasă în rezervorul A după x secunde, din momentul în care apa începe să curgă din A în B până în momentul în care A este gol.

3p b) Definește funcția g care să exprime cantitatea de apă din rezervorul B după x secunde, domeniul de definiție al acestei funcții fiind identic cu cel al funcției f .

4. În figura alăturată $\triangle ABC$ este echilateral cu latura 6 cm, iar $AD = CE = 2$ cm.

2p a) Demonstrează că $DE \perp BC$.

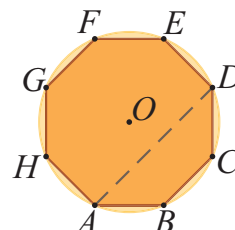
3p b) Calculează raportul dintre aria triunghiului CDE și aria patrulaterului $ABED$.



5. Dintr-un disc de lemn, având centrul O și raza 1 m, s-a obținut o masă poligonală $ABCDEFGH$, prin împărțirea cercului în 8 arce congruente.

2p a) Arată că $GF \parallel AD$.

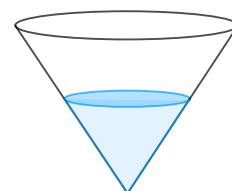
3p b) Dacă 1 m^2 de material cântărește 15 kg, arată că masa obținută cântărește mai puțin de 43 kg.



6. Un pahar are forma unui con cu vârful în jos și baza orizontală. S-au turnat 24 ml lichid, acesta ajungând la înălțimea de 4 cm, ceea ce reprezintă 40 % din înălțimea paharului.

2p a) Calculează înălțimea paharului.

3p b) Câți ml de lichid mai încap în pahar?



Indicații de rezolvare și răspunsuri

Probleme recapitulative. Pag. 8.1. a) $\{1; 3; -1; 2\}, \emptyset, \{3\}, \{-1\}$; b) $\{0; 1; 2\}, \{2\}, \emptyset$. 2. A: a, b, d. 3. a) $\{4; \frac{20}{4}; \sqrt{121}\}$; b) $\{4; \frac{20}{4}; \sqrt{121}; -9; -3\}$; c) $\{4; \frac{20}{4}; \sqrt{121}; -9; -3; 0,5; \frac{4}{5}; \frac{11}{3}; 1, (2); -\frac{4}{3}\}$; d) $\{\sqrt{2}\}$. 4. a) 3; b) 10; c) 2; d) 9; e) 2. 5. B. 6. a) 36; b) 144. 7. a) $(a; b) \in \{(5; 0), (4; 1), (3; 2), (9; 5), (8; 6)\}$; b) $(2; 5)$. 8. $n \in \{-2; 0; 2; 4\}$. 9. a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{13}{11}$; c) $-\frac{5}{9}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{1}{3}$. 10. a) 12; b) 22; c) 33,25; d) $-\frac{11}{72}$; e) $-\frac{16}{7}$; f) 1. 11. a) 3,75; b) 0,82; c) 3; d) 1,8; e) -1,728. 12. 105 km. 13. a) 10; b) -6; c) $x \in \{6; -6\}$. 14. a) 12; b) 12. 15. 95 lei. 16. 30; 50. 17. 40%. 18. a) 12; b) 5; c) 60; d) 13; e) 9. 19. Mai mare este: a) $3\sqrt{2}$; b) 5; c) 6; d) $5\sqrt{2}$. 20. A. 21. a) 2; b) $2 + \sqrt{2}$; c) $-2 + \sqrt{6}$; d) $\sqrt{13} - 2\sqrt{3}$; e) $-2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$. 22. a) $3x + 20 = 110; x = 30$; b) $2x = 5; x = 2,5$ kg; c) $x = y + 12, x + y = 75; x = 43,5; y = 31,5$. 23. a) $n \in \{3; 4; 5\}$; b) $n \in \{3; 4; 5; 6\}$; c) $n \in \{7; 8; \dots; 17\}$; d) 6. 24. a) $x \in \{-6; 6\}$; b) $x \in \{-19; 19\}$; c) $x \in \{-2; 2\}$; d) $x \in \{-12; 12\}$; e) $x \in \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$; f) $x \in \{-4\sqrt{3}; 4\sqrt{3}\}$; g) $x \in \{-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\}$; h) $x \in \{-6; 6\}$; i) $x \in \{5; -5\}$; j) $x \in \{4; -4\}$. 25. a) 3,5; b) -3; c) -1; d) $\emptyset$; e) -3; f) $\emptyset$; g) $\emptyset$; h) 10. 26. a) $(-1; 1)$; b) $(-1; 1)$; c) $(2,2; 5,8)$; d) $(22; -13)$. 27. Oferta 2. 28. $(5; 0), (5; 2), (1; 0), (1; 2)$. 29. a) 2019; 2017; b) aprox. 520; c) Aprox. 8,6%. 30. D. 31. $120^\circ; 30^\circ; 30^\circ$. 32. $x = 88, y = 102$. 33. 100° . 34. $\triangle ADC$ și $\triangle BDC$ sunt isoscele. 35. a) romb; b) dreptunghi. 36. C. 37. A. 38. 240 m^2 . 39. 18 cm^2 . 40. 5 cm^2 . 41. $40 + 8\sqrt{2} \text{ cm}$. 42. $4 + 2\sqrt{2} \text{ cm}; 2 \text{ cm}^2$. 43. a) $AO = A'O; BO = B'O$, ca raze; $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'O B'$, op. la vârf; b) Ex. $\triangle AOB' \equiv \triangle A'OB$; c) $ABA'B'$ este paralelogram. 44. $\triangle ABF \equiv \triangle CDE$ (C.C.). 45. $\triangle ABN \sim \triangle CMB$, deci $\frac{AB}{CM} = \frac{AN}{CB}$. Deducem $MC \cdot AN = AB \cdot BC = \text{const.}$ 46. Fie $\{G\} = DF \cap AB$. $\triangle AGF \sim \triangle CDF$; deducem $\frac{AG}{CD} = \frac{AF}{FC}$; deci $\frac{AG}{AB} = \frac{AE}{AB}$, adică $G = E$. 47. $\triangle JMN \sim \triangle JKL$ și $\triangle PQR \sim \triangle PTS$. 48. a) $\frac{MO}{AB} = \frac{DO}{DB} = \frac{CO}{CA} = \frac{NO}{AB'}$; b) $\triangle APO \sim \triangle CQO$ (L.U.L.). 49. $11\sqrt{2}; 15\sqrt{3}$. 50. a) $\sphericalangle AGE = \sphericalangle AEG = \frac{\sphericalangle C}{2} + \sphericalangle B$ (unghiuri exterioare); b) $\triangle ABC \sim \triangle DBA$ și egalitatea $\frac{DF}{DB} = \frac{AE}{AB}$, de unde AF este bisectoarea unghiului BAD . 51. $\frac{40}{3}$. 52. De ex.: 1. $a = 3\sqrt{2}; c = 3; m = n = h = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $\sphericalangle C = 45^\circ$. 53. $\triangle LSO \sim \triangle LNP$; $\triangle LRM \sim \triangle LNP$; $\triangle LRN \sim \triangle LNP$ etc. 54. 5 cm. 55. $5\sqrt{2} \text{ m}; 40 \text{ m}$. 56. $\frac{245\pi}{6}; 98\pi; \frac{245\pi}{2}; 98\pi$.

Unitatea 1. Pag. 12. Autoevaluare. 1. A. 2. B. 3. B. 4. B. 5. C. **Pag. 13. Test inițial.** 1. 6. 2.-4. 3. D. 4. C. 5. B. 6. 3 și 4. 7. $\{1; 3; 5; 7; 2; 4\}$. 8. 4. 9. a) și d). **Pag. 16.** 1. a) De ex.: $\{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 10\}$; b) $\{1; 2; 4; 5; 10; 20\}$; c) $\{0; 3; 6; 9; 12\}$; d) $\{5; -5\}$. 2. A. 3. a) $\{-6\}$; b) $\{2,3(8); -3,2; -6\}$; c) $\emptyset$; d) $\{\sqrt{7}; \sqrt{5}\}$. 4. De ex.: $\{10; 12; 14; 16; 18; 20\}$; $\{x | x = 2k, k \in \mathbb{N}, 9 < x < 21\}$. 5. a) A; b) A; c) F; d) A; e) A; f) A. 6. a), b), c), e). 7. a) 0,4; 3,(6); 0,1(3); 8; 0,(142857); b) $\frac{215}{100}; \frac{312}{99}; \frac{15}{90}; \frac{113}{10}; \frac{385}{90}$. 8. Mulțimea poate fi: $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}, \{1; 2; 3; 4; 5\}, \{4; 5; 6\}, \{7; 8\}$, sau $\{15\}$. 9. De exemplu: $2,79 \in \mathbb{Q}; 2,79 \in \mathbb{R}$. 10. De ex.: $\frac{321}{90} = \frac{107}{30} = \frac{107}{2 \cdot 3 \cdot 5}$ se reprezintă ca număr zecimal cu perioadă mixtă. 11. $\{3; 9; 8; 1; 7\}$. 12. Nu, este mixtă; se obține $0,36(3)$. 13. De ex.: $\{x | (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 16)(x^2 - 64) = 0\}$. 14. $A = \{3; 4; 5; 8\}, B = \{0; 1; 3; 4; 5; 8\}$. 15. a) Un nr. scris doar cu cifre de 9 este impar; b) $\frac{2}{37} = 0, (054) = \frac{54}{999}$, 999 este multiplu de 37; c) $n | 999$, dar nu divide 9 sau 99; $n \in \{27; 37; 111; 333; 999\}$. 16. a) 45; b) De ex.: $a = 1, b = 181$. 17. $a_1 + a_2 + a_3 = a_2 + a_3 + a_4$, deci $a_1 = a_4$. Continuă la fel și arată că $a = 0, (a_1 a_2 a_3) \in \mathbb{Q}$. **Alege...** A. $\{-15; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 15\}$; B. $\{0; 2; 3\}$; C. $\{-3; 0; 2; 3\}$. **Pag. 18.** 1. De ex., în coloana lui -8 apar: $8; -\frac{1}{8}; 8$. 3. b) $-\sqrt{11} < -3 < -2,5 < -2 < 0 < 1 < \sqrt{5}$. 4. a) 4; -2; b) 4; 2. 5. 2,25; 1,5; 1,5; 2,5; 2,5; 1,25; 1,25. 6. De ex.: $0,848 < \frac{3\sqrt{2}}{5} < 0,849$. 7. C. 8. $B = \{1,2; \frac{5}{2}; 0; \frac{2}{9}; \frac{1}{3}\}$. 9. a), b), c). 10. $a > 0; |a| = 1,5; b < 0; |b| = 2,1$. 11. a) 2; -2; b) $|3 - 7| = 4; |-1 - (-5)| = 4; |-4 - 6| = 10; |x - y| = 10$; c) Prima mulțime are două elemente; a doua se reprezintă printr-un segment. 12. b; c; e. 13. a) $\sqrt{2}$; b) De ex.: 1,1; 1,2; 1,3. 14. Dacă A, B, C sunt punctele de abscise a, b, c , atunci $AB + BC \geq AC$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă punctul B este situat între A și C . **Pag. 19. Alege...** C. $2 - \sqrt{2}; \sqrt{5} - 2$. **Pag. 22.** 1. a) $[-\sqrt{5}; \sqrt{7}]$; b) $(-3; 2\sqrt{5})$; c) $(-\infty; 10]$; d) $(3; +\infty)$. 2. F. 4. De ex. la a): intervalul $(-1; 1)$ se reprezintă pe axă printr-un segment care nu își conține capetele. 5. a; c; d; f. 6. a) $(0; 150]$; b) $(0,05; 1,5)$; c) $[490; 510]$. 7. a) $(-5; 1]$; b) $[-6; 2)$; c) $(-\infty; 0]$; d) $(6; +\infty)$. 8. De ex., 0 aparține intervalelor de la punctele a), b), c). 9. $a = 0, b = 1$. 10. Dacă, prin absurd, intervalul nu ar conține numere întregi, atunci găsim un număr întreg n astfel ca $n < a < b < n + 1$. Deducem că $b - a < (n + 1) - n = 1$, contradicție. 11. Știm că $x \leq y$ și $y - x < 1$. Atunci $|x - y| = y - x, |x - y - 1| = y - x + 1$ și $|x - y + 2| = x - y + 2$. Obținem $-(y - x) + 2(y + 1 - x) + (x - y + 2) = 4$. **Pag. 22. Alege...** A. -2; 10; B. 2, (1); $\sqrt{3}$; C. $I = (-\frac{2}{3}; 5]$. **Pag. 25.** 1. C. 2. a) $\{1; 2\}$; b) $(-1; 2,5]$; c) $(1; \sqrt{2})$; d) $[-1; 2]$. 3. a) $\{4\}$; b) $\{4\}$; c) $[-6; 4]$; d) $(2; 6)$. 4. a) $(0; 3)$; b) $[\sqrt{2}; 3]$; $[-5; 4)$; d) $\{0; 1; 2; 3\}$; e) $\{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. 5. a) $(3; 10]$; b) $(3; 9]$; c) $\mathbb{R}$; d) $(1,73; +\infty)$. 6. a) $[-3; 3]$; b) $(-8; 8)$; c) $[-0,5; 0,5]$. 7. a) $[-7; 10]$; $[-3; 7]$; b) $(-4; 4)$; $[-2; 2]$; c) $[-9; 9]$; $(-6; 6)$; d) $[-8; 8]$; $(-6; 6)$. 8. a) $[0,45; 0,60] \cap [0,50; 0,65] = [0,50; 0,60]$, $[1989; 2010] \cap [1995; 2020] = [1995; 2010]$; b) $[0,45; 0,65]$; $[1989; 2020]$. 9. D. 10. D. 11. a) 0; 2; b) 1; 3. 12. $a = 2, b = 5$. 13. $a = b$, deci $(a - b)^{2005} = 0$. **Pag. 25. Alege...** A. $[-3; 5)$; $(-2; 3]$; B. $[-3,2; 3,2]$; $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$; C. $(1; 9)$. **Pag. 28.** 1. a) da; b) nu; c) nu; d) da. 2. a) $[-1; +\infty)$; b) $(-\infty; 2)$; c) $(-\infty; 3]$; d) $(-4; +\infty)$; e) $(-\infty; -4)$; f) $(-\sqrt{2}; +\infty)$. 3. a) $-3 > x + 1$; b) $1 < 2x + 2$; c) $6x + 8 \geq 4x$. 4. $\{0; 1; 2; 3\}$. 5. Maxim 500. 6. a) $(-1; +\infty)$; b) $[-1; +\infty)$; c) $(-\infty; -1)$; d) $(-\infty; -1]$; e) $(-3; +\infty)$. 7. a) $2x - 1 \leq 3x$; b) $x \geq -3$; c) $-5 + x < -3x$. 8. a, b, d, e, f, g, h, j. 9. a, b, e, f. 10. a) $(-\infty; 2]$; b) $(-\infty; 2)$; c) $[0,5; +\infty)$; d) $[-3; +\infty)$; e) $[1; +\infty)$; f) $(1; +\infty)$; g) $(-\infty; \frac{2}{3})$; h) $(-\infty; -0,5]$; i) $(2; +\infty)$; j) $[-1; +\infty)$; k) $(5; +\infty)$; l) $(-\infty; 3)$; m) $(-\infty; -0,5]$; n) $(-\infty; 1,75]$; o) $(-\infty; 2)$; p) $(-\infty; 1,5)$; q) $(1,25; +\infty)$. 11. a) $\{0; 1; 2; 3\}$; b) $\{1; 2; 3; 4\}$; c) $\{-3; -4; -5; -6; \dots\}$; d) $\{0; 1; 2\}$; e) $\{-2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$;

f) {1; 2}. **12. a)** $\mathbb{R}$; **b)** $\emptyset$; **c)** $\mathbb{R}$; **d)** $\emptyset$. **13. a)** $(-\infty; 3]$; **b)** $[-5; +\infty)$; **c)** $(-\infty; 6)$. **14.** $(-\infty; 0)$. **15. C.** **16.** -4. **17.** $(-\infty; 1,1)$. **Pag. 28.**
Alege... **A.** {0; 1}; **B.** {0; 1; 2; 3; 4}; **C.** (-2; 0). **Pag. 31. 1. A.** **2.** De ex.: $4 \in (2; +\infty)$ și $2 \cdot 4 - 1 > 3$. **3. a)** $(-\infty; 3]$; **b)** $[3; +\infty)$; **c)** $(-\infty; -2]$; **d)** $(-0,2; +\infty)$; **e)** $[5; +\infty)$; **f)** $(-\infty; 8]$; **g)** $(-\infty; 2]$; **h)** $[1; +\infty)$; **i)** $[-4; +\infty)$. **4.** De ex. **a)** {2; 1; 0; -1; -2; -3; ...} în $\mathbb{Z}$; {0; 1; 2} în $\mathbb{N}$. Scris altfel: $(-\infty; 3) \cap \mathbb{Z}$, respectiv $(-\infty; 3) \cap \mathbb{N}$. **5.** (0; 8) (în cm.) **6.** (8; + ∞) (în m.) **7. a)** $(-1; +\infty)$; **b)** $(-3; +\infty)$; **c)** $(-\infty; -2,5]$; **d)** $(-\infty; -0,2]$; **e)** $(-\infty; 0,8]$; **f)** $(-\infty; 0,5]$; **g)** $(-\infty; 1]$; **h)** $(-\infty; -5]$. **8. B.** **9.** Cel puțin 3000 lei. **10.** (2; 6). **11.** (0; 3). **12. b)** $(3 - \sqrt{3}; +\infty)$. **13.** 8; 9; ...; **14. 14. a)** $[-5; 1]$; $\{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1\}$; **b)** $\{-4; 8\}$; $\{-3; -2; -1; 0; 1; \dots; 7\}$; **c)** $\emptyset$; **d)** $[-2; 0,5]$; $\{-2; -1; 0\}$; **e)** $[-0,8; 2]$; $\{0; 1; 2\}$; **f)** $\{-1,5\}$; $\emptyset$; **g)** $\{-14; 26\}$; $\{-13; -12; \dots; 0; 1; \dots; 25\}$; **h)** $(-3 + \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2})$; $\{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$. **15. a)** $(\frac{2}{3}; +\infty)$; **b)** $(\sqrt{2}; +\infty)$; **c)** $(-\frac{2}{3}; +\infty)$; **d)** $(-\infty; -2)$. **16.** (-2; 3]. **17.** $(-\infty; 1,5]$. **Pag. 31.**
Alege... **A.** $(-\infty; 5]$; **B.** $(\frac{5}{3}; +\infty)$; **C.** $(-\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty)$. **Pag. 32. 1.** {2; 3; 5; 7}. **2. a)** De ex.: $\{x | x \text{ număr natural, impar, de o cifră.}\}$; **b)** De ex.: $\{x | x \in \mathbb{N}, 10 \leq x < 100\}$; **c)** De ex.: $\{x | x = -y^2, y \in \mathbb{N}, 1 \leq y \leq 3\}$. **3.** [2; 3]; [-1; 4]. **4. a)** $(-\infty; -5]$; **b)** $(-\infty; 0,5]$; **c)** $(-1; +\infty)$; **d)** $(-3; +\infty)$; **e)** $(1; +\infty)$; **f)** $(-\infty; -4)$. **5. a)** $\mathbb{R}$; **b)** $(-\infty; 3]$; **c)** $(-\infty; 0]$; **d)** $(-\infty; -6]$; **e)** $(-0,6; +\infty)$; **f)** $(-\infty; 1,2)$. **6.** -3. **7.** (-1; 2). **8.** $-\sqrt{5}$. **9.** (0; 13,79). **10.** $(-\infty; \frac{4}{3})$. **11.** $(-\infty; \frac{1}{3})$. **12.** (0; 20). **13. F.** **14. a)** De ex.: $2x - 1 > 3x - 3$; **b)** De ex.: $2x - 1 > -3$. **15.** {0; 1; 2; 3}. **16. 12 17. 2. Pag. 33. Testul 1.** 2; [2; 3). **3. C** **4.** [-9; + ∞) **5.** Asociază numere capetelor intervalelor, apoi află originea și construiește punctul de abscisă -2. **Testul 2.** [1; 2]. **3.** ①C, ①D; ②A; ③B. **4.** $(-\infty; 1,25)$. **5.** Asociază numere capetelor intervalelor, apoi determină punctul de abscisă -1 și construiește punctul de abscisă +1.
Unitatea 2. Pag. 49. 1. a) $12x^2 + 23xy + 10y^2$; **b)** $18x^2 + 18xy + 4y^2$; **c)** $49x^2 - 56x + 16$; **d)** $16x^2 + 24x + 9$. **2. a)** $7+4\sqrt{3}$; **b)** $3+2\sqrt{2}$; **c)** $9+4\sqrt{5}$; **d)** $13+4\sqrt{3}$; **e)** $7-4\sqrt{3}$; **f)** $6-4\sqrt{2}$. **3. a)** $x^2 + 4xy + 4y^2$; **b)** $y^2 + 2yx + x^2$; **c)** $a^2 + 1,4a + 0,49$; **d)** $9 + 6y + y^2$; **e)** $6,25 - 10y + 4y^2$; **f)** $2,56 + 3,2b + b^2$; **g)** $9 - 6y + y^2$; **h)** $4 - 12z + 9z^2$; **i)** $16a^2 + 8ab + b^2$; **j)** $2 + 2\sqrt{2}y + y^2$; **k)** $12 - 8\sqrt{3}y + 4y^2$; **l)** $6 + 2\sqrt{6}b + b^2$. **4. a)** $6x$; **b)** 1; **c)** $4a^2$; **d)** a^2 ; **e)** $20a$; **f)** $\frac{1}{4}$; **g)** $4ab$; **h)** 16. **5. a)** $(\sqrt{2} + 1)^2$; **b)** $(\sqrt{2} - 1)^2$; **c)** $(5 + \sqrt{2})^2$; **d)** $(\sqrt{7} - \sqrt{2})^2$; **e)** $(4 + \sqrt{5})^2$; **f)** $(\sqrt{14} + 1)^2$; **g)** $(\sqrt{3} - a)^2$; **h)** $(3 + \sqrt{2})^2$; **i)** $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$; **j)** $(y + \sqrt{2})^2$; **k)** $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$; **l)** $(2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$. **6. a)** $(a + 1)^2 + 2 > 0$; **b)** $(a + 3)^2 + 1$; **c)** $(a - 2)^2 + 1$; **d)** $(a - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$; **e)** $(a + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$; **f)** $(2a + 1)^2 + 1$; **g)** $(a + 3)^2 + 2$; **h)** $(a + 1)^2 + \frac{1}{4}$. **7.** $a^2 + 9 \geq 6a \Leftrightarrow a^2 - 6a + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (a - 3)^2 \geq 0$ adevărat; $4a \leq a^2 + 4 \Leftrightarrow 0 \leq a^2 - 4a + 4 \Leftrightarrow 0 \leq (a - 2)^2$ adevărat; $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2 \Leftrightarrow (a - \frac{1}{a})^2 \geq 0$ adevărat. **8. a)** 7; **b)** 38; **c)** $2\sqrt{2}$. **9. a)** $(x^3 + x^2 + x + 1)^2$; **b)** $(3x - x^2 + 3)^2$; **c)** $(x^4 + x + 2)^2$; **d)** $(x^3 - x^2 + 6)^2$. **Alege...** **A.** $a^2 + 2ay + y^2$; $1 + 4x + 4x^2$; $1 - 2x + x^2$; **B.** $(113 - 72\sqrt{2})/2$; **C.** $a = 10k + 5, a^2 = 100k(k + 1) + 25$ și cifra zecilor este 5, iar a unităților 2. **Pag. 51. 1. a)** $15 - 13x + 2x^2$; **b)** $-6x^2 + 14x - 8$; **c)** $4 - x^2$; **d)** $9 - 4y^2$. **2. a)** $12-6\sqrt{3}$; **b)** $16a^2 - 24ab + 9b^2$; **c)** $c^2 - ac + 0,25a^2$; **d)** $2a^2 - b^2$; **e)** -2; **f)** $19-6\sqrt{2}$; **g)** $4a^2 - 20ab + 25b^2$; **h)** $x^2 - 4y^2$; **i)** $9b^2 - c^2$; **j)** 17. **3. a)** 1; **b)** 18,5. **4. a)** $\sqrt{3} + \sqrt{2}$; **b)** $7-14\sqrt{2}$; **c)** $x^4 - 16y^4$; **d)** $a^4 - 81b^4$; **e)** $16a^4 - b^4$. **5. a)** $x=4$ și $A=14$; **b)** $x=\sqrt{31}$ și $A=30$. **6. a)** $\sqrt{23}$; **b)** 2; **c)** $\sqrt{11}$. **7.** $\overline{a5^2} = 100a(a + 1) + 25$. **8.** $R=25/4$. **9. a)** $x^4 + x^2 + 1$; **b)** $x^2 + 2xy + y^2 - 4$; **c)** $a^2 - b^2 + 6a + 9$; **d)** $4x^2 - z^2 - 4x + 1$. **10. a)** $4+2\sqrt{6}$; **b)** $2\sqrt{2}$; **c)** $9+2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}$; **d)** $9+2\sqrt{2}+4\sqrt{3}+4\sqrt{6}$. **11.** $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1) = (x^4 - 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1) = (x^8 - 1)(x^8 + 1) = x^{16} - 1$. **12.** $8n^2(n + 1) : 8$. **Alege...** **A. a)** $x^2 - y^2$; **b)** -2. **B.** $\sqrt{2}$ și 1. **C.** $\sqrt{2}$. **Pag. 53. 1. a)** $2(x+y)$; **b)** $2(3a-3b-3c)$; **c)** $2(3x-2y)$; **d)** $2(2x+3x^2)$; **e)** $2(a-b)$; **f)** $2(2x^2+4xy)$; **g)** $2(6x^3-4x+2y)$; **h)** $2(0,2a-0,6b)$. **2. a)** $-3x(-2x+4)$; **b)** $-3x(-5x+9)$; **c)** $-3x(-10x+4x^2+5)$; **d)** $-3x(-4x^3-15x^2+6x)$; **e)** $-3x(x^2+8-7x)$; **f)** $-3x(20x^3-12x+6)$. **3. a)** $3(x+y)$; **b)** $2(\sqrt{2}a-2b)$; **c)** $x^2(x+1)$; **d)** $12(1-y)$; **e)** $3\sqrt{2}(x-\sqrt{3}y)$; **f)** $x(x^2-x+1)$; **g)** $a^2(a-2)$; **h)** $0,5(p+q)$; **i)** $a(a-b)$; **j)** $3(x+2x^2-4)$; **k)** $x(x^3+x-1)$; **l)** $a(y^2+z-x)$; **m)** $6(a-b-c)$; **n)** $2x(x^3-2x+6)$; **o)** $11(x-2)$; **p)** $\sqrt{2}(3a+b)$. **4. a)** $5(x-2y)$; **b)** $3a(x-4)$; **c)** $4(3-x)$; **d)** $0,5x(50x-1)$; **e)** $(a+b)(x-y)$; **f)** $(4x-3y)(x-2)$; **g)** $(x^2+a^2)(x+2a)$; **h)** $(x^2+2)(x-5)$; **i)** $(x+2)(2x-1)$; **j)** $(2x-1)(x-1)$; **k)** $-2(x-7)$; **l)** $(x-2)(a-x+3)$. **5. a)** $xy(x^2+y^2)$; **b)** $x(a+b)$; **c)** $(a+b)(x+1)$; **d)** $(a-b)(t-x)$; **e)** $(x-y)(x+\sqrt{2})$; **f)** $x(x-y)^2(1+3x^2)$; **g)** $(x-1)(a-b)$; **h)** $(a+4b)(x-1)^2$; **i)** $(a-b+c)(x-3)$; **j)** $(m-p+q)(x+a)$; **k)** $6(x-\sqrt{5})$; **l)** $(x-4)(x-2y)$. **6. a)** $(x+y)(a+b)$; **b)** $(x+y)(x+y-1)$; **c)** $2(x-2)(2x-5)$; **d)** $(2x+3y)(x-y)$; **e)** $(x-2)(x+1)$; **f)** $x(x-1)(x-3)$; **g)** $(a^2+b^2)(a+b)$; **h)** $(a-2)(x-y+1)$; **i)** $(2x+y)(2x+5y)$. **7. a)** $(a^2+b^2)(a+b)$; **b)** $(m^2+3)(m-3)$; **c)** $(x+y)(x-2a)$; **d)** $(x-y)(y+3)$; **e)** $(x+y)(z+t)$; **f)** $p^2(p-1)(p^2+3)$; **g)** $(a-b)(x+b)$; **h)** $(a-b)(a^3+a+2)$. **8. a)** $x^2+6x+2x+12=x(x+6)+2(x+6)=(x+2)(x+6)$; **b)** $(y-2)(y-3)$; **c)** $(z+3)(z+4)$; **d)** $(a+1)(a+2)$; **e)** $(t-6)(t+1)$; **f)** $(x+3)(x+5)$; **g)** $(y-3)(y+2)$; **h)** $(z+1)(z+3)$; **i)** $(z+1)(z+8)$; **j)** $(x+4)(x+5)$. **Alege...** **A. a)** $x^2(x-y)$; **b)** $3x(2x-y)$. **B. a)** $(x-1)(y-2)$; **b)** $2(x+1)(y-1)$. **C. a)** $(x+2)(x-7)$; **b)** $(y+9)(y+11)$. **Pag. 55. 1. a)** $(x-y)(x+y)$; **b)** $(m-3)(m+3)$; **c)** $(4-x)(4+x)$; **d)** $(8/9-c)(8/9+c)$; **e)** $(2a-b)(2a+b)$; **f)** $(10-x^2)(10+x^2) = (\sqrt{10-x})(\sqrt{10+x})(10+x^2)$; **g)** $(x-4y)(x+4y)$; **h)** $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$; **i)** $(x+4)^2$; **j)** $(a-7)^2$; **k)** $(2a+1)^2$; **l)** $(1+3x)^2$. **2. a)** $(x+3)^2$; **b)** $(2b-3a)^2$; **c)** $(\sqrt{5-x})^2$; **d)** $(3a/5-5)^2$. **3. a)** $3(3a-b)^2$; **b)** $288x^2(2y^2+1)$; **c)** $(2xy+5z)^2$; **d)** $(9ay-5x)(9ay+5x)$; **e)** $(17a-13b)(17a+13b)$; **f)** $(19-12x)(19+12x)$. **4. a)** $(x^2+y^2)(x-y)$; **b)** $(x+b)(x+a)$; **c)** $(0,5-x)(0,5+x)$; **d)** $(ab-4c)(ab+4c)$; **e)** $(\sqrt{2a-\sqrt{3}})(\sqrt{2a+\sqrt{3}})$; **f)** $(9-c)(9+c)$; **g)** $(x+y)(x-y+\sqrt{2})$; **h)** $(x-y)(7+4x+4y)$. **5. a)** $(1-3x/2)^2$; **b)** $(x-\sqrt{6})^2$; **c)** $(\sqrt{2x+1})^2$; **d)** $(3-0,5a)^2$; **e)** $(4x+1)^2$; **f)** $(5+y)^2$; **g)** $(a\sqrt{3}-1)^2$; **h)** $(\sqrt{3xy+\sqrt{2}})^2$. **6. a)** $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$; **b)** $(x^4+2)(x^2+1)(x+1)(x-1)$; **c)** $(y+3)(y-1)$; **d)** $(a-2)(a-3)$; **e)** $(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$; **f)** $(z-1)(z+1)(z^2+1)$; **g)** $x(x+1)(x^2+x+3)$; **h)** $(y^2+y+6)(y^2+y+2)$. **7. a)** $a=8, b=-9$; **b)** $a=1$ sau $a=-1$; **c)** $b=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. **9. a)** $(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)=4b^2c^2 \Leftrightarrow a^4=(b^2+c^2)^2 \Leftrightarrow a^2=b^2+c^2 \Leftrightarrow A=90^\circ$. **b)** $2a^2+b^2+c^2=2a(b+c) \Leftrightarrow (a-b)^2+(a-c)^2 \Leftrightarrow a-b=a-c=0 \Leftrightarrow a=b=c$. **c)** $\triangle ABC$ este isoscel $\Leftrightarrow a=b$ sau $b=c$ sau $c=a \Leftrightarrow (a-b)(b-c)(c-a)=0 \Leftrightarrow ab^2-a^2b+a^2c-ac^2+bc^2-b^2c=0 \Leftrightarrow ab^2/abc-a^2b/abc+a^2c/abc-ac^2/abc+bc^2/abc-b^2c/abc=0 \Leftrightarrow b/c-a/c+a/b-b/c+b/c-a/b/a=0$. **Alege...** **A. a)** $(g+h)^2$; **b)** $(4+x)^2$. **B. a)** $(x+y+1)(x-2y+1)$;

b) $(a+c+b)(a+c-b)$. **C.** a) $(x+2)(x+4)$; b) $(a+2b)(a+4b)$. **Pag. 57. 3. a)** $2^2 \cdot 5 \cdot 2 + 6 = 0 \Rightarrow 2$ este soluție, $(-3)^2 \cdot 5 \cdot (-3) + 6 = 30 \neq 0 \Rightarrow -3$ nu este soluție; **b)** 2 și -3 nu sunt soluții; **c)** 2 nu este soluție, -3 este soluție; **d)** 2 și -3 nu sunt soluții. **4. a)** 2; **b)** 4; **c)** $\sqrt{2}/2$; **d)** 3; **e)** $\emptyset$; **f)** $\mathbb{R}$; **g)** -3; **h)** 0; **i)** 0. **5. a)** $1/2$; **b)** $-1/2$; **c)** -3; **d)** $1/3$; **e)** $\emptyset$; **f)** $\sqrt{2}/2$; **g)** $\emptyset$; **h)** $\sqrt{2}/3$. **6. a)** 4; **b)** $1/3$; **c)** $15/2$; **d)** -0,8; **e)** $-\sqrt{2}-1$. **7. a)** B; **b)** A. **8. 2/3. 9. a)** Nu este corect deoarece, prin împărțirea cu necunoscuta x, se pierde soluția $x=0$; **b)** Este corect. **10. a)** -2; **b)** $-1/2$; **c)** 5; **d)** $\mathbb{R}$; **e)** $\emptyset$; **f)** $1/3$; **g)** 0,5; **h)** 1; **i)** $1/5$; **j)** $-\sqrt{2}/4$; **k)** $-3/4$; **3/2. Alege...** **A.** 17/4; **B.** 5 și -7; **C.** $2/3$ și $-2/3$. **Pag. 60. 2. a)** 0; **b)** $\pm\sqrt{5}$; **c)** 2 și 3; **d)** 0 și $3/2$. **3. a)** $1 \pm \sqrt{2}$; **b)** -1 și $3/2$; **c)** 1; **d)** -1 și $2/3$; **e)** ± 2 ; **f)** 0 și $-3/2$. **4. a)** $(1 \pm \sqrt{17})/2$; **b)** -1 și 2; **c)** 1 și 5; **d)** 1 și $-1/3$; **e)** 1 și 3. **5. a)** C; **b)** B; **c)** D. **6. a)** $3x^2 - 10x + 3 = 0$; **b)** $(x-1/3)(x-2/3) = 0$; **c)** $x^2 - 1/4 = 0$. **7. 3. 8. a)** ± 2 ; **b)** $\pm\sqrt{3}$; **c)** -1; **d)** $\emptyset$. **9.** Pentru $a=-1$ se obține 0, iar pentru $a=-2$ se obține $-3/2$. **10. a)** $-2 \pm 2\sqrt{2}$; **b)** $-\sqrt{5} \pm 3$. **11.** $(1+\sqrt{3})/2$. **12.** $\sqrt{13}-1$. **13.** $(1 \pm \sqrt{17})/4$. **14.** Dacă n/k , cu $(n,k)=1$, este sol. a ecuației, atunci $an^2 + bnk + ck^2 = 0$ ceea ce este fals pt. că membrul stâng este un nr. impar pentru orice a,b,c întregi impare. **Alege...** **A.** 2. **B.** $5/2$; $9/2$. **C.** $(6 \pm \sqrt{15})/2$. **Pag. 61. 2. a)** $x+10y$; **b)** $21x^4y$; **c)** $3x$; **d)** $216x^{12}$. **3. a)** 4; **b)** -2; **c)** $1/2$; **d)** $1/4$; **e)** 4; **f)** 2; **g)** 0; **h)** $\mathbb{R}$. **4. a)** 1,67; **b)** 1,73; **c)** 1,04; **d)** 1,98. **5. a)** $4y^3$; **b)** $4b^2c$; **c)** $20yz/3$; **d)** $\sqrt{5}b^2c^3d/\sqrt{2}$. **6. a)** $9x^6y^3$; **b)** $25a^2b^2c^6$; **c)** $0,03125x^{10}y^{15}z^5$; **d)** $9a^{20}b^4c^4$. **7. a)** $6x^2 - 4xy$; **b)** $-2a^3x^2 - ax^2 + ax^2$; **c)** $3\sqrt{2}bx + 2\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}a$. **8. a)** $x^2 + 6x - 27$; **b)** $6ab - 14a + 15b - 35$; **c)** $8x^6 + 1$; **d)** $27x^3 - 8y^3$. **9. a)** $x^2 - 121$; **b)** $36 - a^2$; **c)** $9x^2 - 16$; **d)** $4y^6 - 81$; **e)** $25 - x^4$; **f)** $3x^2 - 5y^2$. **10. a)** $9(a+b)$; **b)** $12(a+b+c)$; **c)** $a(a^2+a+1)$; **d)** $6x^2(3x^2+1)$; **e)** $tu(2-3tu-4t^2u^2)$; **f)** $(x-2)(x+7)$; **g)** $2(2+x)(x-5)$; **h)** $6x^2$; **i)** $(x-2)(x-4)$; **j)** $2(x+2)(x-2)$. **11. a)** $(a+5)^2$; **b)** $(9+x)^2$; **c)** $(11a-1)^2$; **d)** $(a^2-1)^2$; **e)** $(\sqrt{3}y-1)^2$; **f)** $(0,1x+1)^2$; **g)** $(4-x)(4+x)$; **h)** $(t-u)(t+u)$; **i)** $(ab-cd)(ab+cd)$; **j)** $(2-a)(4+a)$; **k)** $5(2x+1)$; **l)** $(x+2)(3x-4)$; **m)** $(2\sqrt{2}-x)(2\sqrt{2}+x)(8+x^2)$; **n)** $(y^4+16)(y^2+4)(y+2)(y-2)$. **12. B. 13. a)** $(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{3})$; **b)** $(x^2+x+2)(x^2+x-1)$; **c)** $4a^2$; **d)** 36; **e)** $4x^2$; **f)** $4x^2$; **g)** $16x^2$. **14. a)** $3(3x-1)(x+1)$; **b)** $(x-1)(x+5)$; **c)** $3(3x+1)(1-x)$; **d)** $(x+1)(x+3)$; **e)** $(x-1)(x+5)$; **f)** $(x-3)(x+1)$; **g)** $(x-1)(x+1)(x^2+3)$. **16. a)** 0 și $3/2$; **b)** 1 și 2; **c)** 0 și $-1/3$; **d)** 1 și -5; **e)** -1; **f)** 3 și -1; **g)** $-1/3$ și $1/3$; **h)** -3 și 2. **17. m=1/2. 18.** $x^2 - 3x + 2 = 0$. **19.** $l=0,7$ și $l=3,5$. **20.** 11 și 12. **21.** $x=2$ cm, $y=4$ cm. **22.** $x=4$, $A=6$, $P=12$. **23. a)** $x^2+4x+3=(x+2)^2-1$ și cea mai mică valoare este -1, pt. $x=-2$; **b)** -1, pt. $x=2$; **c)** -1, pt. $x=-3$; **d)** -4, pt. $x=3$; **e)** -4, pt. $x=1$; **f)** -1, pt. $x=-5$; **g)** -9, pt. $x=-1$. **24. a)** $-x^2+2x+4=5-(x-1)^2$ și cea mai mare valoare este 5, pt. $x=1$; **b)** $1/4$, pt. $x=3/2$; **c)** $9/8$, pt. $x=1/4$; **d)** $-3/4$, pt. $x=1/2$; **e)** $4/3$, pt. $x=1/3$; **f)** 1, pt. $x=1$; **g)** $9/4$, pt. $x=-1/4$. **25. m=-7/4. 26.** $\Delta=4-4m>0 \Rightarrow m \in (-\infty, 1)$. **27. a)** 3 și -3; **b)** 2 și -3; **c)** $3/8$ și $-5/6$; **d)** -1 și -22; **e)** nu are soluții reale; **f)** 0 și 5; **g)** nu are soluții reale; **h)** $-\sqrt{3}$ și $-\sqrt{5}$; **i)** 2 și $\sqrt{7}$; **j)** -1; **k)** -1; **l)** nu are soluții reale; **m)** nu are soluții reale. **28.** $\Delta=9m^2+24m=0$, cu $m=0$ și $m=-8/3$. **29.** $\Delta=1+4m<0 \Rightarrow m \in (-\infty, -1/4)$. **Pag. 63. Testul 1. 1. a)** $2x^2y$; **b)** $-2\sqrt{2}a^{15}b^3c^3$; **c)** $-5a^3x^2-2ax^3+ax^2$; **d)** $9x^6-6x^4+16x^2-5$. **2.** $2 \cdot \frac{1}{4} - 5 \cdot \frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 2 = -2 + 2 = 0$. **3. A. 4.** x^2-4y^2 . **6.** 2 și 8. **Testul 2. 1. a)** $2b^2c$; **b)** $3,375x^9y^6z^3$; **c)** $6x^2-4xy$; **d)** $2x^3+x^2y+2xy^2-12y^2$. **2. a)** 10. **3. A. 4.** $x^2+xy/2$. **6.** 3 și 7.

Unitatea 3. Pag. 64. Autoevaluare 1. B) 2. D) 3. D) 4. C) 5. C) 6. C) 7. B) 8. B). Pag. 65. Ce știi deja? I.1. -3 și 3. **2.** -50. **3.** 1,06(7). **II. 4. C. 5. A. 6. B. III. 7.** -158/9. **8. a)** $3x^2-12x+18$; **b)** $4x^2+90x-250$. **9. a)** $3ab(a-b)^2$; **b)** $(a+1)(b+1)$; **c)** $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x^2+5)$; **d)** $(x-y-3)(x+y+1)$. **Pag. 67. 1.** $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, $\mathbb{R} \setminus \{-7\}$, $\mathbb{R}$. **2. a)** $-1/5$, $\sqrt{6}/2$, $-\sqrt{35}/3$; **b)** $(\sqrt{3}+1)/2$, $(\sqrt{7}+\sqrt{5})/2$. **3. a)** $(x-2)^2/(x-2)$; **b)** $(x^2-4)/(x-2)^2$; **c)** $(x^2-4)(x-2)/x^2(x-2)$; **d)** $(x-1)(x-2)/(x-2)^2$. **4. a)** $1/(x-2)$; **b)** $x/(3-x)$; **c)** $(2x+1)/3$; **d)** $1/(2x-1)$. **5. C. 6. B. Alege...** **A. a)** $3(2x-1)/(4x^2-2x)$; **b)** $(4x^2+24x-13)/(2x^2-x)$. **B. -x-1. C.** $(3x+13)/(x-5)$. **Pag. 68. 1. a)** $11/15$; **b)** $5\sqrt{6}/6$; **c)** $2z/(z^2-9)$; **d)** $3/x$; **e)** $(x-1)/x$; **f)** $4/35$; **g)** $(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})/30$; **h)** $(x-1)/(x^2-5x)$; **i)** $(2x^2-x+5)$; **j)** 0. **Pag. 69. 2. a)** $(3x^2+2x+1)/(9x^2-1)$; **b)** $y/(y^2-1)$. **3. a)** $2\sqrt{2}+\sqrt{6}+4\sqrt{3}+2\sqrt{5}$; **b)** $(14\sqrt{7}-21\sqrt{3}+5\sqrt{2}+\sqrt{15})/7$. **4. a)** $2\sqrt{a}/(a-b)$; **b)** $2a/(a^2-b)$; **c)** $2\sqrt{a}/(a-b^2)$. **5. a)** $21/8x$; **b)** $(2-x^2)/x(x-1)^2$; **c)** $-4/(x^2-4)$; **d)** $x/(x^2-3)$. **6. a)** $2\sqrt{2}+\sqrt{11}-\sqrt{5}-1$; **b)** $3\sqrt{2}+\sqrt{7}/2-5\sqrt{3}/2$; **c)** $6+3\sqrt{3}+2\sqrt{5}$. **7. a)** $(2x-1)/(2x+1)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$; **b)** $2/(x+1)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$; **c)** $(x^3+x^2+x-2)/(x-1)(x^2+2x+3)$, cu $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **8. C) 1. 9. 9. 10. a)** 4; **b)** $31/2$. **Alege...** **A.** $5(x+1)/x^2$. **B.** $(2x^2-x+5)/(x-1)^2(x+1)$. **C.** $(x^2+2x-1)/(x^2-1)$. **Pag. 71. 1. a)** $x/6$; **b)** $3/2x$; **c)** -3; **d)** $14/x$; **e)** $1/2x$; **f)** $27x^3/125y^3$; **g)** $y/8$. **2. a)** $x^2/(x+2)$; **b)** $2/x(x-4)$; **c)** $-12/x^2(x-1)$; **d)** $(x-2)/x(x+1)$; **e)** $1/(x+7)$; **f)** $-6/(x-2)$; **g)** $5/2$; **h)** $x/2(5x+1)$. **3. a)** $(x-1)/4x$; **b)** $x+1$; **c)** $\sqrt{5}$; **d)** $(x^2+1)/(1-x)(3x+1)$; **e)** $5/8(x+2)$; **f)** $1/(x+1)$; **g)** $1/2(y+1)$. **4. a)** $-3x$; **b)** $-8x/(x-4)^2$; **c)** $(x-1)/2(x+3)$; **d)** $(x+4)(x-5)/(x-2)^2$. **5. a)** $1/x$; **b)** $(x-1)^2(3x+1)/(3x-1)$; **c)** $4/9x^2$. **6.** Egalitatea este echivalentă cu $2bc+2ac+2ab+a^2+b^2+c^2=0 \Leftrightarrow (a+b+c)^2=0 \Leftrightarrow 0^2=0$. **Alege...** **A.** $15x^2y/2$; **B.** $2/x(x-4)$. **C.** $2(x-3)/(x-2)$. **Pag. 73. 1. a)** $\sqrt{2}+1$; **b)** $\frac{\sqrt{3}}{6}$; **c)** $\sqrt{5}+\sqrt{3}$; **d)** $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$. **2. a)** $\frac{1}{x-1}$; **b)** $\frac{x}{x+1}$; **c)** $\frac{2x+1}{3}$; **d)** $\frac{3x-2}{3}$; **e)** $\frac{5x-2}{x^2}$; **f)** $\frac{x+1}{x-4}$. **3. a)** $-\frac{33}{8}$; **b)** 1. **4. a)** $\frac{-3x+2}{x}$; **b)** $\frac{1}{3}$; **c)** $\frac{x^2}{(x-7)(x+7)}$; **d)** $\frac{7}{x+4}$. **5. a)** $\frac{x-1}{3}$; **b)** $\frac{1}{x^2(x-2)^2}$; **c)** $\frac{2}{(x+1)(2x-1)}$; **d)** $\frac{x-1}{x(4x^2-1)}$; **e)** 0; **f)** $\frac{x-2}{x+2}$. **7. a)** Folosim $2x^2+3x-2=(2x-1)(x+2)$; **b)** F nu este definită pentru $x \in \{0; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -2; 1\}$; **c)** $F(|a|)=\frac{1}{3} \Rightarrow |a|=1 \Rightarrow a \in \{-1; 1\}$ și verifică $a=-1$; **8. b)** $a=0,5$; $E(a)=1,2$; **9. b)** $x \in \{-3; -1; 2; 3; 6\}$; **c)** $b \in \{-4; -2; 0; 2\}$. **10.** Ca sumă $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$; ca diferență $\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$; ca produs $\frac{2}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1}$; ca raport $\frac{2}{x+1} : \frac{x-1}{x}$; **11. a)** Observăm că $\frac{0,5x-1}{x-2} = \frac{\frac{1}{2}(x-2)}{x-2} = \frac{1}{2}$ apoi calculul devine facil; **b)** $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2; 4; -4\}$; **c)** Obținem $\frac{(x+4)^2}{x-4} \leq 0 \Rightarrow x \in \{-\infty; 4\} \setminus \{-4; 0; 2\}$; **12. a)** $H(x)=\frac{\sqrt{5}}{5}$; **b)** $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 0; 5\}$; **c)** 0; **13. a)** $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}; -1\}$; **b)** $E(x)=\frac{7}{2x-5}$; **c)** $x \in \{2; 3; 6\}$; **14.** $E(x) \geq 1$; **15. a)** da; **b)** $a=3$ și $b=2$; **16. a)** ambele, -2 **b)** -2. **17. a)** $x=-2a$; $y=-2a$; $z=a$, $a \in \mathbb{R}$. **17. a)** $x=-2a$; $y=-2a$; $z=a$, $a \in \mathbb{R}$; **b)** Dacă x, y, z sunt numere nenule și distincte, numitorii rapoartelor ce apar în E sunt nenuli. Notăm $s = x + y + z$ și obținem $E = x/(3x-2s) + y/(3y-2s) + z/(3z-2s) = 1$. **Alege...** **A.** 1; **B.** 0; **C.** $\frac{7}{x+4}$. **Pag. 76. 1. a)** $x \in \mathbb{R}^*$; $x \in \{-1; 1\}$; **b)** $x \in \mathbb{R}^*$; $x \in \{-6; +6\}$; **c)** $y \in \mathbb{R}$; $y \in \{-3; 3\}$; **d)** $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $S = \{-2\}$; **e)** $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $S = \{-\frac{5}{2}\}$; **f)** $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$; $S = \{6\}$; **g)** $y \in \mathbb{R}$; $y \in \{-2; 2\}$; **h)** $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; \frac{5}{3}\}$; $S = \{10\}$; **2. a)** nu; $x = \{-2; 2\}$; **b)** nu; s-a pierdut soluția $y=3$; **3.** Aplicând Teorema lui Thales, aflăm: $\frac{x}{4} = \frac{9}{x}$ unde $x=AD=CE$ deci $x=\{-6; 6\}$; se acceptă $x=6$ (lungime de segment); **4. a)** $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; $x \in \{-1; 0\}$; **b)** $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$; $S = \emptyset$;

c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$, $S = \emptyset$; d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$; $S = \{3\}$; e) $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$, $S = \{-\frac{1}{5}\}$; f) $\mathbb{R} \setminus \{-3; -2\}$, $S = \{-\frac{17}{7}; 6\}$; g) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$, $S = \{2\}$; h) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $S = \{0\}$. 5. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1; -2\}$, $S = \emptyset$; b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 9; 3\}$, $S = \emptyset$; c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}; \frac{2}{5}; \frac{5}{2}\}$, $S = \{-\frac{2}{5}\}$. 6. a) ± 2 ; b) 0; c) $S = \{(-2; 3)\}$; d) $S = \{-3; 7\}$. 7. a) $-\frac{7}{3}$; 1; b) 12; c) -3; -1; d) $-\frac{4}{3}$; e) 1; 5. Alege... A. $S = \{-1\}$; B. $S = \{\pm \frac{\sqrt{10}}{2}\}$; C. $S = \{2\}$. Pag. 79. 1. a) $S = \{2 \pm \sqrt{5}\}$; b) $S = \{-2 \pm \sqrt{5}\}$; c) $S = \{-\frac{1}{2}; 1\}$; d) $S = \{\frac{1}{2}; -1\}$; e) $S = \{-\frac{1}{2}\}$; f) $S = \{\frac{1}{2}\}$. 2. a) Nu; b) Da; c) Da; d) Nu; e) Da; f) Nu. 3. 1 $\rightarrow$ b; 2 $\rightarrow$ c; 3 $\rightarrow$ a. 4. a) $x^2 \geq 0$, $-1 < 0$; b) $(2x - 1)^2 \geq 0$, $-6 < 0$; c) $x^2 \geq 0$; $1 - \sqrt{3} < 0$; d) $10(x - 4)^2 \geq 0$; $7 > 0$. 5. a) $S = \{1\}$; b) $S = \{-1/3\}$; c) $S = \{-6; 4\}$; d) $S = \{-2; 4\}$; e) $S = \{-2; 0\}$; f) $S = \{1\}$; g) $S = \{1/2; 3/4\}$; h) $S = \emptyset$. 6. a) $S = \{-1/2; 0\}$; b) $S = \{-3; 0\}$; c) $S = \{0; 2\}$; d) $S = \{-1; 0\}$. 7. a) $S = \{\pm 4\}$; b) $S = \{1\}$; c) $S = \{0\}$; d) $S = \{2/3\}$; e) $S = \{-5/2\}$; f) $S = \{-\sqrt{2}\}$; g) $S = \{-1/2\}$; h) $S = \{-1; 0\}$. 8. a) $S = \{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\}$; b) $S = \emptyset$; c) $S = \{\pm 5\}$; d) $S = \emptyset$; e) $S = \{\frac{-5 \pm 2\sqrt{10}}{5}\}$; f) $S = \{\pm 3\}$; 9. 3; 4; 5; 10. 12 pers, 250 lei; 11. După 10 unități; 12. 48 m²; Alege... A. a) 5/2, -5/2; b) 5/2; B. a) $\sqrt{2}$; b) 1; C. 10%; Pag. 80. 1. a) $x \neq 0$, $y \neq 0$, $2x/3$; b) $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x^2/3y^3$; c) $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x^2/(x-1)$; 2. a) $2(6-x)/(x^2-1)$; b) $2x/(x-1)$; c) $27/8x^2$; 3. 66°, 57°, 57°; 4. 36; 5. $-(3x+2)/(x+2)^2$; 6. 5h40min.; 7. a) 0; -3; b) $S = \{\pm \frac{2}{3}\}$; c) $S = \{\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}\}$; d) $S = \{\frac{-2 \pm \sqrt{148}}{2}\}$; e) $S = \{3/5\}$; f) $S = \{4\}$; 9. 3; 10. b) $R = \{-1, 1, 0, 2/3, -2/3\}$; c) $\{-4; -2; 2\}$; 11. Se obține suma de pătrate $(x^2 - \frac{3}{2})^2 + (x - \frac{3}{2})^2 \geq 0$; 13. a) $a = \pm 2$; b) $a = 2$. 14. $F(x) = x$. Pag. 81. Test 1. 1. $\frac{b^3}{2}$; 2. $\frac{1+2x}{1-2x}$; $F(x) = \frac{1}{x+2}$; 3. 3. 4. a) $S = \{-4; 0\}$; b) $S = \{\frac{1}{2}\}$; c) $S = \{-2; 1\}$. 5. 10 m, 6 m. Test 2. 1. (a-b)/b; 2. $(1+3x)/(1-3x)$; 3. $6x/(x+2)$; 4. a) $\pm 1/2$; b) $\emptyset$; c) $3/4; 1/2$; 5. $AB = 4,5$ m, $AC = 6$ m. Unitatea 4. Pag. 82. Autoevaluare. 1. B. 2. A. 3. D. 4. C. 5. D. Pag. 83. Test inițial. 1. $\{-3; 2\}$. 2. $\{(0; 2); (0; 3); (0; 4); (1; 2); (1; 3); (1; 4)\}$; 3. 8. 4. C. 5. D. 6. C. 7. $AB = \sqrt{13} < BC = \sqrt{20} < AC = \sqrt{37}$. 9. 25; 50; 75; ...; 200. Pag. 85. 1. a) 2. $D = \{1; 2; 3\}$, $C = \{1; 2; 3; 4\}$; 2. 4. 3. 0; 2; 3. 5. a) 6. Ana și Mati; 7. a) $D = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$; b) M ; c) Da. 8. a) $6\sqrt{3}$; b) $\{6\sqrt{3}; 24\sqrt{3}; 54\sqrt{3}\}$. 9. a) 4; -4; b) $(d; c; b) \in \{(1; 1; 2); (1; 2; 1); (2; 1; -1); (2; -1; 1); (3; -1; -2); (3; -2; -1)\}$. 10. a) De ex.: $u(3) = 1$; b) De ex. 1 apare de 4 ori; nu apare 7; c) Contează doar ultima cifră a lui n ; d) Putere a patru nu se poate termina în 9. 11. a) 2; 3; 20; b) Număr prim; pătratul unui număr prim; c) De ex., $n = 2^{t-1}$ are t divizori; d) 1296; e) Descompunem m ca produs de factori primi: dacă este cub perfect, toți exponenții sunt multipli de 3, iar numărul de divizori dă rest 1 la împărțirea cu 3. Alege... B. $\{2\pi; 3\pi; 4\pi; 5\pi\}$; C. De ex.: 3; 5. Pag. 87. 1. B. 4. b; c. 5. 3. 6. a) 1; b) $D = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$, $C = \{-1; 0; 1; 2\}$; c) F; d) 3; e) 4. 7. a) 4; 7; 13; 16; b) 91. 8. 7. 9. a) $a = 3$; b) $a = \pm 2$. 10. $f(x) = x$. Indicație: dacă $f(n) = 1$, atunci $n = 1$. 11. $f(n) = 3n + 7$. Alege... A. $f(4) = 7$. B. $\{(1; \pi); (3; 9\pi); (6; 36\pi); (7; 49\pi)\}$. C. 3. Pag. 89. 1. A. 2. 4; -2; -5; -11. 3. a) 0,5; b) -0,5. 5. a) $D = [-1; 3]$; b) $\{1; 2; 3; 6\}$. 6. a) $f(x) = 0,5x$; b) Punctele graficului nu sunt coliniare. 7. c) -2; d) Factorul de proporționalitate este raportul între cateta verticală și cea orizontală (ca în dem. din lecție). 8. $f(x) = 1,03x$. 9. a) $f: \{-1; 0; 1; 2\} \rightarrow \{-3; 0; 3; 6\}$, $f(x) = 3x$; b) $f(x) = 6 - x$; c) $f(x) = 2x + 1$. 10. Indicație: folosește $f(m) = p$ și $f(p) = m$. 11. Reprezintă punctele de forma $(n; CMMDC\{n; 20\})$ și determină triplete de puncte coliniare. Alege... A. $f(12) = -37$. B. A, B, D. C. 1; 4. Pag. 91. 1. C. 2. A. 3. A. 5. -5°F; 0°F; 5°F. 6. a) $f(x) = 3x$; b) $f(x) = -x$; c) $f(x) = -3x$. 7. 4; 6; 2; 3; 1; -3. 8. -2. 9. 6. 10. p. 11. a) 5050; b) 10100; c) 5550; d) 10000. 12. 0; 1. 13. a) $f(x) = 2x - 3$; b) nu. 14. c) $(-\infty; -2]$. 15. a) -4; -1; b) $g(x) = 3x - 7$. 16. a) 5; -4; b) $f(x) = 3x - 1$. Alege... B. 0. C. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$. Pag. 94. 1. a) semidreaptă; b, d) segment; c) dreaptă. 2. F. 3. De ex: a) $f: (-\infty; 0) \rightarrow \mathbb{R}$. 5. $f: [0; 700] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 42 - 0,06x$. Pentru reprezentare grafică, e util să alegi unități de măsură diferite pe cele două axe. 6. $P(1; 0)$. 7. a) $A = (-\infty; 2]$; c) Nu. 8. $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0,85x$. 9. a) $f: [0; 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 60x$; b) 45 km. 0. $f: (1; 5) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 5$. Folosește inegalitatea triunghiului. 11. $f: [0; 200] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 300 - 1,5x$. Alege... C. $p: (0; 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $p(l) = 4 - l$. Pag. 97. 1. $D = [0; 2]$; -2; 2; 0. 2. $\sqrt{20}$. 3. 0,5. 4. De ex.: $f(x) = x$, $g(x) = 2x - 1$. 5. a) $f: [-1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$; b) $f: (-\infty; 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$. 6. $A(-2; 0)$; $B(0; 2)$; $C(2; 4)$; $AB = 2\sqrt{2}$, $AC = 4\sqrt{2}$. 7. a) $f(1) = 1,5$; b) $f(x) = 0,5x + 1$. 8. $I(-1; 3)$. 9. Graficele sunt drepte paralele. 10. a) $[-2; +\infty)$; b) $-2; 0; 1$; c) $x \in [1; +\infty)$. 11. a) $f_1(x) = 300 + 50x$, $f_2(x) = 50 + 100x$; c) 5. 12. Punctele de inters. sunt $A(-2; 0)$, $B(0; -2)$; $C(2; 2)$. Arată că OM este mediană, unde $M(0; 1)$. 13. 3. Pag. 99. 1. 1000; 22,5%; 30%; 15%; 32,5%. 2. b) 265; c) 38,49%; 14,55%. 4. a) Nr. de probleme rezolvate; b) 30; c) 5-8. 5. b) 6. Nr. de autoturisme vândute în total, respectiv în România; De ex: în 2024 - 35,4% total și 34,63% în România (6,76% din total). 7. a) matematică-informatică; b) 200; c) 24. 8. 40; 30%; 40%; 20. 9. a) 20315457; b) 23329140. 11. 72°. Alege ... A. 1100. B. 305. C. 14,55%; 23,18%; 35%. Pag. 102. 1. F. 2. Da, media este 9,1. 3. T; 3,08. 4. 1h. 5. 10,3°C; 11°C; 10,5°C. 6. C. 7. b. 8. De ex.: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9, 10. 9. 3; 3. 10. a) 1035; b) 685; c) aprox. 6,50 lei; d) 11; 4; 6. 11. a) 3500; b) 34; c) 6110 (aprox.); d) 44. 12. Indicație: observă frecvența cu care apar simbolurile în mesaj, apoi compară cu frecvența literelor în limba română. Textul este: Ai reușit să înțelegi cum putem folosi statistica în domenii foarte diverse, cum ar fi, de exemplu, decodarea unor mesaje. 13. a) Medii egale cu 26 pct.; b) La A: 25; 30; la B: 20; 50; c) B - are medie mai mare. 14. Toate scad cu 20%. Pag. 104. 1. a, b, d. 2. 8,83; 8,50. 5. $f(x) = x - 3$; $g(x) = 5x$; $h(x) = -3x - 2$. 6. $a \in \{-1; 2\}$. 7. a) $(-3; 0)$, $(0; 3)$; b) $(6; 0)$, $(0; 6)$; c) $(-\frac{2}{3}; 0)$, $(0; 2)$. 9. 4; 4; 3 și 5; 2. 10. 6,08; 7; 7; 6. 11. $(-\infty; 6]$. 12. a) da; b) da; c) da. 13. paralelogram; 4. 14. Date proporționale cu razele. Pag. 105. Testul 1. 1. b). 3. a) 1; b) $(-\infty; 2]$. 4. A. 5. a) 10 min.; b) 7,5 min. Testul 2. 1. d). 3. a) $D = (-\infty; 4]$; b) $x = 2$. 4. F. 5. a) 16,66%; b) aprox. 12,8°C. Unitatea 5. Pag. 106. Autoevaluare. 1. D. 2. B. 3. B. 4. D. 5. A. Pag. 107. Test inițial. 1. corespondente. 2. 12. 3. 60°. 4. medianelor. 5. D. 6. B. 7. Alătură trapezele pe o latură. 8. Trasează paralela la o latură, dusă printr-un vârf. 9. Sunt laturi într-un paralelogram. Pag. 109. 1. A. 2. De ex.: $M \in a$. 3. a) De ex.: $A \in \alpha$; b) F. 6. $C \in AB$ și $AB \subset \alpha$, deci $C \in \alpha$. 7. b) Suma a două laturi

ale unui Δ nu poate fi < decât a treia; **c)** Dacă $A \notin BC$, atunci $AB + AC > BC$; **d)** $P \in MN$ și $MN \subset \alpha$, deci $P \in \alpha$. **8.** $C \in \alpha$. **9. a)** coliniare; **b)** necoliniare. **10.** 1 sau 3. **11. a)** 1; **b)** 190; **c)** Da, dacă exact 3 puncte sunt coliniare. **12.** Alegem pe dreaptă punctele distincte A și B , colorate cu aceeași culoare, de exemplu cu roșu. Notăm C mijl. segm. AB , D sim. lui B față de A și E sim. lui A față de B . Dacă unul din punctele D , C , E este colorat cu roșu, am terminat; dacă nu, aceste trei puncte sunt colorate cu albastru, dar C este mijl. lui DE . **13.** Considerăm hexagonul reg. $ABCDEF$ și centrul O al acestuia. Presupunem că O este colorat cu roșu. Dacă toate vârfurile hexagonului sunt albastre, am terminat (de ex. $\triangle ACE$ este ech.). În caz contrar, presupun punctul A colorat cu roșu; atunci B , C , E , F sunt colorate cu albastru iar D este colorat cu roșu. Fie $\{G\} = AB \cap CD$; deducem că sau $\triangle BCG$, sau $\triangle ADG$ are toate vârfurile de aceeași culoare și este ech. **Alege... B. Nu. C. 21. Pag. 111. 1. A. 2. F. 3. b, c. 4. D. 5.** Marginile cutiei pe care se mișcă rigla sunt drepte concurente, care determină un plan. **6. a)** $C \in AB$, $D \in AB$; **b)** Alegem A , B , C necoliniare (dacă există). Planele ce conțin A , B , C , D , respectiv A , B , C , E au trei puncte necoliniare comune, deci coincid. Dacă oricare trei puncte sunt coliniare, atunci toate sunt coliniare, deci coplanare. **7.** Din A pleacă 5 segm.: cel puțin 3 dintre acestea, să zicem AB , AC , AD , au aceeași culoare – de ex. roșu. BC , BD , CD nu pot fi roșii, deci sunt albastre. Conduzia nu mai e adevărată pentru 5 puncte. **8. AC**, BD , TO sunt concurente, la fel după îndoire. **Alege... A. Da; B. 6; C. O. Pag. 113. 1. F. 2. A. 4. a)** Pir. patr. reg.; **b)** Pir. hex. reg.; **c)** Tetraedru reg. **5. a)** 8; **b)** 7; **c)** 4. **6. a)** $6\sqrt{3}$ cm; **b)** $3\sqrt{3}$ cm. **7. a)** Sunt drepte concurente, conțin mijl. lui BC ; **b)** Da; **c)** Raportul de proporționalitate este $\frac{1}{3}$. Analogie cu un triunghi, în care am construit linii mijlocii. **8.** $4\sqrt{3}$ m; **da.** 9. Vârfurile de la bază sunt numerotate succesiv 1, -1, 1, -1, ..., deci baza are număr par de vârfuri. **10.** O desfășurare a unui tetraedru are forma unui triunghi, în care au fost trasate liniile mijlocii. **Pag. 115. 1.** De ex.: $a \parallel b$, deoarece formează unghiuri alterne-interne congruente. **2.** De ex.: EG ; AB ; BR . **3.** $BB' \parallel AA'$ și $DD' \parallel BB' \equiv DD'$. **4. a)** confundate; **b)** paralele; **c)** da. **5.** În orice poziție, $AB \parallel MN \parallel CD$. **6. a)** $VAGC$ este paralelogram; **b)** $VDGC$ este paralelogram. **7. a)** $MN \parallel BC \parallel RQ$ și $MQ \parallel AD \parallel RN$; **b)** Mijloacele acestor segmente coincid. **8.** $\frac{AG}{AE} = \frac{AH}{AF} = \frac{2}{3}$, deci $GH \parallel EF$; $perim. = 10 + 4\sqrt{3}$ cm; $aria = 5\sqrt{11}$ cm². **9. a)** $MN \parallel AB \parallel CF$; **b)** $PQ \parallel CF \parallel MN$; **c)** sunt drepte coplanare, neparalele. **10.** Dacă $\{O\} = AC \cap BD$, iar M și N sunt mijloacele segmentelor $A'C'$ și $B'D'$, din trapezele $ACC'A'$ și $BDD'B'$ deducem că $OM = ON = 10$ cm, deci $M=N$. Rezultă că $A'B'C'D'$ este paralelogram. **Pag. 117. 1. c. 2.** inclusă; secantă; secantă; paralelă; paralelă; paralelă; paralelă; paralelă; paralelă. **4.** paralelă; secantă; secantă. **5.** $EF \parallel BD$, $BD \subset (BCD)$; $FG \parallel AC$, $AC \subset (ABC)$. **6. a)** secantă; **b)** paralelă. **7. a)** $MN \parallel AB$, $AB \subset (ACD)$; **b)** De ex.: $CE \parallel OM$, $OM \subset (OMN)$. **8.** Muchia AB este paralelă cu dreapta determinată de balamale. **9. a)** OQ este paralelă cu patru dintre fețele cubului și secantă la celelalte; **b)** OQ este paralelă cu două dintre fețele cubului și secantă la celelalte. **10.** Triunghiurile VAD și VAE sunt congruente (I.U.), deci $VD=VE$. Deducem $DE \parallel BC$. **11. a)** $BC \parallel AD$, $AD \subset (SAD)$; **b)** $CD \parallel AB$, $AB \subset (SAB)$; **c)** $EF \parallel AC$, $AC \subset (ABC)$; **d)** $SC \parallel EO$, $EO \subset (BED)$ (unde O este intersecția diagonalelor paralelogramului). **12.** Dacă $AE \cap BC = \{M\}$, $AF \cap BD = \{N\}$, atunci E și F sunt mijloacele segmentelor AM și AN , deci $EF \parallel MN$. **13. a)** Pe desfășurare, demonstrăm că T este mijlocul lui VB . Deducem $VD \parallel TO$, unde O este centrul bazei. **b)** $D \notin (VAB)$. **14. 4. 15.** Construind paralele prin E și F la CD , deducem că $O \in MN$, unde MN este linia mijlocie a triunghiului ACD . Dacă $AO \cap CD = \{T\}$, atunci $HO \parallel BT$. **16.** Dacă M și N sunt mijloacele muchiilor BC și CD , atunci $EF \parallel MN \parallel BD$. De aici, deducem toate relațiile cerute. **17.** Fie $S \in VD$ astfel ca $VS = 2SD$. Deducem $GS \parallel AD \parallel BP$ și $GS = \frac{AD}{3} = BP$. Cum $BG \parallel PS$, $PS \subset (VDP)$, rezultă $BG \parallel (VDP)$. **18. a)** $GH \parallel (CEB) \Leftrightarrow GH \parallel EC \Leftrightarrow \frac{AG}{GC} = \frac{AH}{HE} \Leftrightarrow DC \equiv EF$; **b)** MG și NH trec prin mijlocul segmentului AB . **19.** Dacă S este mijlocul lui ED , atunci $AOGS$ este paralelogram, deci $AO \parallel GS$. $HO \parallel (EBD)$. **Alege... A. CD** $\parallel AB$, $AB \subset (VAB)$. **B. A'D'** $\parallel AD$, $AD \subset (ABC)$. **C. CF** $\parallel AB$, $AB \subset (VAB)$. **Pag. 121. 1. F. 2. Nu. 3.** AB și BF . **4.** paralele; paralele; secante. **5.** $DE \parallel AB$, ca drepte de intersecție a planelor paralele (DEF) și (ABC) cu planul (VAB) . Obținem $\frac{DE}{AB} = \frac{VD}{VA} = \frac{VE}{VB}$. **6.** paralele. **7. e)** $AD \parallel BC$ și $DE \parallel CF$; **f)** $MP \parallel BC$ și $PN \parallel CF$. **8.** C , O , L sunt coliniare, fiind pe dreapta de intersecție a planelor (FGH) și (ABD) . **9. a)** Dreapta OQ , unde O și Q sunt intersecțiile diagonalelor în dreptunghi, respectiv în pătrat; **b)** Raționăm pe o desfășurare plană a figurii; $AG=3,6$ cm. **10.** Afirmatiile devin adevărate, cu completarea "sau $\alpha < \alpha'$ ", respectiv "sau $\alpha < \beta'$ ". **11. a)** $EFGH$ este paralelogram, deoarece, de ex., EF , AC coplanare, $(EFGH) \parallel AC \Rightarrow EF \parallel AC$. **b)** Dacă $\frac{AE}{EB} = x$, atunci $HE = \frac{x}{x+1}BD$, $EF = \frac{1}{x+1}AC$. Deci $HE + EF = \frac{x}{x+1}BD + \frac{1}{x+1}AC \geq \left(\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1}\right)BD = BD$. **12. a)** VA , unde $\{A\} = LO \cap MU$; **b)** paralela prin V la LU . **13.** Deoarece $MN \parallel PQ$, $MN \subset (VAB)$, $PQ \subset (VCD)$, MN și PQ sunt paralele cu dreapta de intersecție a planelor (VAB) și (VCD) , deci sunt paralele cu AB . Analog, $MQ \parallel AD$. Deducem că $(MNPQ) \parallel (ABCD)$ și obținem imediat că $MNPQ$ este pătrat. **Alege... A.** De ex.: (ABC) și (EFG) ; (ABC) și (BCG) . **B. NP** $\parallel AB$, $NQ \parallel AD$. **C.** Aplică teorema de paralelism. **Pag. 124. 1. B. 2. A. 3. a)** 12; **b)** 8; **c)** 6. **5.** Toate laturile sunt de 12 cm. **6.** Este la mijlocul fiecăreia. **7. b)** $BDGE$. **8. a)** FH ; **b)** simetricul lui F față de O ; **d)** N este simetricul lui H față de G ; P este simetricul lui H față de E ; **e)** **A. 9. b)** $f - m + v = 2$. **10.** Demonstrează că laturile opuse sunt paralele și congruente, iar toate laturile au aceeași lungime. **11.** Fețele sunt dreptunghiuri, deoarece diagonalele lor sunt congruente. Comparăm apoi două fețe alăturate și deducem că muchiile sunt de aceeași lungime. **Alege... A. 2 dm. B. paralele. C. 90 cm. Pag. 127. 1. F. 3.** $40\sqrt{2}$ cm; 200 cm². **4.** 34 cm; 60 cm². **6.** 12 cm. **7.** 12 cm. **8.** 8 cm. **9.** $198\sqrt{2}$ cm². **10.** Fețele laterale sunt trapeze isoscele. **11.** 32 cm; $2\sqrt{3}$ cm. **12.** Dacă a și b sunt lungimile muchiilor AB , respectiv DE , atunci $\frac{CG}{CA} = \frac{CH}{CB} = \frac{a+b}{2a}$. Calculăm lungimea segmentului GH , folosind asemănarea triunghiurilor. **13.** Cele trei triunghiuri din enunț sunt asemenea, iar raportul ariilor este pătratul raportului de asemănare. **Pag. 128. 1.** Fețele opuse ale unui paralelipiped sunt paralele. **2. A. 3.** Demonstrăm prin tranzitivitate că d este paralelă cu una din muchiile de pe podea. **4.** Dreapta SO , unde O este centrul bazei piramidei. **6.** Urmărește ca fețele laterale să rămână lipite pe câte o muchie laterală. **7. MN** $\parallel BD$ $\parallel HF$ și PM $\parallel EB$ $\parallel HC$. **8. C. 9. a)** Arată că sunt coplanare; **b)** Găsește o dreaptă paralelă cu AC , care trece prin E . **10.** Dreapta d

este paralelă cu o muchie a piramidei. **11.** Demonstrează că dreptele AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 sunt două câte două concurente și nu sunt toate în același plan. **12.** Folosește tranzitivitatea relației de paralelism. **13. a)** Laturile triunghiului DEF sunt paralele cu liniile mijlocii ale triunghiului OMB ; **b)** $\frac{2}{3}$. **Pag. 129. Testul 1. 1.** Paralelă. **2. F. 3.** $P \in AH, Q \in CH$. **4.** Suporturile sunt linii mijlocii ale unor trapeze, deci sunt paralele cu planul orizontal. **5.** Fie $\{M\} = AI \cap BD, \{N\} = AJ \cap CD$. Atunci $IJ \parallel (BCD) \Leftrightarrow IJ \parallel MN \Leftrightarrow \frac{AI}{IM} = \frac{AJ}{JN} \Leftrightarrow DM = DN \Leftrightarrow DB = DC$. **Testul 2. 1.** Secante, cu dreapta comună MN . **2. F. 3.** $AC \parallel EG$. **4.** Cele patru stîngii sunt linii mijl. în dreptunghiuri, deci sunt paralele cu planul orizontal. **5.** AM și AN înălț. din A ale $\triangle ABC$ și $\triangle ABD$; Avem $BM \equiv BN$ și $IJ \parallel (BCD) \Leftrightarrow IJ \parallel MN \Leftrightarrow AI = AJ \Leftrightarrow \sphericalangle ABI \equiv \sphericalangle ABJ \Leftrightarrow \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BAD \Leftrightarrow BC = BD$.

Unitatea 6. Pag. 130. Autoevaluare. 1. A; 2. B; 3. C; 4. D. Pag. 131. Test inițial. 1. DE; 2. 45°; 3. $\sphericalangle(a,b)=90^\circ$; 4. C; 5. A; 6. D. III. 7. 209 mm²; 8. a) 25/13; b) 60/13. Pag. 133. 1. 60°; 2. a) 42°; b) 28°; c) 42. 3. Toate sunt adevărate. 4. a) 45°; b) 90°; c) 90°; d) 45°; e) 90°; f) 45°. 5. 40°; 6. a) 0°; b) 60°; c) 45°; d) 90°. 7. a) 0°; b) 60°; c) 60°; d) 60°. 8. $EF \parallel CD$; 9. $\sqrt{2}$; **Alege... A. 4/5; B. 28°; C. 4/3. **Pag. 136. 1.** $AD \perp (ABC)$; 2. A; 3. a) 108°; b) 30°; c) $AC \perp AB, AC \perp VB$; 4. AB, DC, EF, HG ; 5. $BC \perp AD, BC \perp AE \Rightarrow BC \perp (AED)$; 6. C; 7. a) 72°; b) $AB \perp SC, AB \perp SM$; 8. $VO \perp AC, VO \perp BD$; 9. a) $\text{tg} VBA = 3\sqrt{2}/4$; b) $AB \perp AD, AB \perp VD$; 10. a) $BD \perp (SAC)$; b) $\sphericalangle(CD, SB) = \sphericalangle SBA = 45^\circ$; 11. a) $4\sqrt{2}$; b) 4; 12. 0,3; 2,2; 3; 2.13.9/4; 14. $AC \perp (D'DB)$. Dintr-un punct se poate construi o singură perpendiculară pe un plan; 15. $AB \perp (BCF)$ și analoagele; **Alege...** A. $AG \perp EL, AG \perp RL$; B. $MI \perp IL, MI \perp OL$; C. $IT \perp SM, IT \perp RM$. **Pag. 138. 1. A; 2. 7; 3. a) $5\sqrt{2}$ b) 45°. 4. $\triangle SOA \equiv \triangle SOB \equiv \triangle SOC$ (CC); 5. 960; 6. $6\sqrt{6}$ 7.35; 8. 12; 9. a) $\triangle ACB'$ ech., muchii lat. congruente; b) Centrul $\triangle ACB'$ este piciorul înălțimilor piramidelor de la a); 10. Se formează triunghiuri congruente. Nu. 11. a) 9; b) $4,5\sqrt{3}$; **Alege...** A. 5; B. 6; C. Dacă M' este sim. lui M față de mijl. N al înălțimii din D , iar $MM' \cap CD = \{T\}$, se arată că $MM' > MT$. **Pag. 140. 1. D; 2. A; 3. 4 cm; 4. $5\sqrt{2}$ 6.15; 8.18; 9. Se arată că $OO' \perp (ABC), OO' \perp (A'B'C')$; 10. $4\sqrt{3}$. **Pag. 142. 2. 49π ; 3. 5π ; 4. $R = 15, r = 10, h = 12$; 5. 20; 6. $6\sqrt{3}$; 7. $10 + \sqrt{300} < 27,4 < 28$; 8. $6\sqrt{3}$; 9. $3,89 + 0,6 = 4,49 < 4,5$, deci trece; **Alege...** A. 10; B. 8π ; C. $4\sqrt{3}/3$. **Pag. 145. 1. F; 2. a) C; b) AC; c) C; d) C; e) A; f) AC; 3. A; 4. a) A; b) C; c) H; d) D; e) AC; f) BG; 5. $Pr_{(ABC)} AC' = AC = 10, Pr_{(BCC')} AC' = BC' = 3\sqrt{29} \text{ cm}, Pr_{(ABB')} AC' = AB' = 17 \text{ cm}$. 6. 10; 7. a) $DCEF$ este paralelogram. $Pr_{(ABE)} D = F \Rightarrow DF \perp (ABE)$. Din $DF \perp (ABE), EF \subset (ABE) \Rightarrow DF \perp EF$. b) Din $DF \perp (AFB), CE \parallel DF \Rightarrow CE \perp (AFB)$. c) $Pr_{(BEF)} AC = AE$. d) $Pr_{(AEF)} BD = BF = 5 \text{ cm}$. e) Centrul lui $ABEF$; 8. Fie M mijlocul laturii BC . $Pr_{(A'B'C')} BC = B'C'$ și $M \in BC \Rightarrow Pr_{(A'B'C')} M = M', M'$ mijlocul laturii $B'C'$. Arată că $MM' \parallel BB' \parallel AA'$. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC . $G \in AM$, a.î. $GM/AM = 1/3$. Fie $GG' \parallel MM' \parallel AA', G' \in A'M'$. Arată că $Pr_{(A'B'C')} G = G'$ și $G'M'/A'M' = 1/3$. 9. $A'D = 12\sqrt{2}$; 10.5; 11. Mijl. lui BC ; 12. $15\sqrt{3} \text{ cm}^2/4$; **Alege...** A. $\sqrt{2}$; B. 18; C. $6\sqrt{5}$. **Pag. 147. 1. a) $8\sqrt{3}$; b) $8\sqrt{2}$; c) 8; d) 0; 2.30°; 3. 37; 4. 45°. 5. $\sqrt{12}/3 \text{ m} < 120 \text{ cm}$; 6. 60°; 7. Fie $ABCD A'B'C'D'$ paralelipiped dreptunghic cu $\cos u = \cos D'BD = BD/D'B$; $\cos v = \cos AD'B = D'A/D'B$; $\cos w = \cos AD'B = D'A/D'B \Rightarrow \cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 w = 2(L^2 + l^2 + h^2)/(L^2 + l^2 + h^2) = 2$. 8. Fie x și l lung. cablului, respectiv latura pătratului. $Pr_{(ABC)} VA = OA$. Din $\triangle VOA$, dreptunghic în $A \Rightarrow \cos 30^\circ = AO/VA = l\sqrt{2}/2x$, respectiv, $\cos 45^\circ = l\sqrt{2}/[2(x+1)]$. Obținem $2l = x\sqrt{6}$ și $x = l - 1$. În final, $l = \sqrt{6}(\sqrt{6} - 2) = (6 + 2\sqrt{6})/2 = 3 + \sqrt{6} > 5$; 9.45°; 10. Notând O centrul tr. ech. ACF , $\sphericalangle(AB, (ACF)) = \sphericalangle BAO$ și analoagele. **Alege...** A. 45°; B. 45°; C. 30°. **Pag. 150. 1. F; 2. a) 90°; b) 45°; c) 90°. 3. C; 4. a) $\sphericalangle$ dintre înălțimile din A și C ale tr. SAB și SBC ; b) $\sphericalangle SOB = 90^\circ$; 5. a) $\sphericalangle CBE$ sau $\sphericalangle DAF$; b) 6; c) 60°. 6. $\sin u = 2\sqrt{2}/3, \cos u = 1/3$ 7. a) $BC \perp (DAM)$. Deci $DM \perp BC$. Din $(DBC) \cap (ABC) = BC, DM \perp BC, DM \subset (DBC), AM \perp BC, AM \subset (ABC) \Rightarrow \sphericalangle[(DBC), (ABC)] = \sphericalangle DMA$. b) 60°; c) $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. 8. a) 90°; b) 60°; c) 30°. 9. 45°; 10. Fie M mijlocul laturii BC . Unghiul plan al diedrului este $\sphericalangle AMD$. $\triangle MAD$ este isoscel cu $MA = MD = 2\sqrt{3} \text{ cm}$. $A_{\triangle MAD} = 4\sqrt{2} \text{ cm}^2 = (MA \cdot MD \cdot \sin AMD) \text{ cm}^2/2$; $\sin AMD = 2\sqrt{2}/3$. 11. 60°; 12. 60°; 13. 18; **Alege...** A. 45°; B. 30°; C. $4\sqrt{3}$; **Pag. 152. 1. F; 2. 65°. 3. 90°. 4. 0°; 5. $\text{tg } u \approx 1,273$; 6. 30°; 7. $\sphericalangle DER = 30^\circ, \sphericalangle DTR = 45^\circ$; 8. a) Fie M mijl. muchiei AB . $\sphericalangle((VAB), (ABC)) = \sphericalangle VMO$. $VM = 16; VA = 8\sqrt{7}$; b) $VM = 8\sqrt{2}; VA = 8\sqrt{3}$; c) $VM = 16\sqrt{3}/3; VA = 8\sqrt{15}/3$. 9. $\sphericalangle VAO = 30^\circ$; 11. $12\sqrt{3} + 6\sqrt{10} + 12$; 12. 60°; 13. a) 90°; b) 90°; 14. Toate aceste unghiuri au tangenta $\sqrt{2}$; 15. 70°; **Alege...** A. 45°; B. 30°; C. 45°. **Pag. 155. 1. a) $AD \subset (ABD), AD \perp (DBC) \Rightarrow (ABD) \perp (DBC)$; 2. a) $SA \subset (SAB), SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$; 3. a) $VO \subset (VAB), VO \perp (ABC) \Rightarrow (VAB) \perp (ABC)$; 4. c) $NI \perp (BUN), NI \subset (BNI) \Rightarrow (BNI) \perp (BUN)$; 5. $BC \perp (AMD)$; 6. c) $PE \subset (DEP), PE \perp (DRE) \Rightarrow (DEP) \perp (DRE)$; 7. a) $FO \parallel DD', DD' \perp (ABC) \Rightarrow FO \perp (ABC)$; $FO \subset (EFO), FO \perp (ABC) \Rightarrow (EFO) \perp (ABC)$; $d(F, (ABC)) = DD'/2 = 5$; b) 8. $2\sqrt{3}$ și $\sqrt{3}$; 9. b) $AB \perp (CMD)$. c) $2\sqrt{6}$; 10. Se formează triunghiuri asemenea. Obținem $BD \perp AC'$. 11. Se arată că $\triangle COM$ este dreptunghic, unde O este mijl. lui EL ; 12. $6\sqrt{10}$; 13. a) 2; b) $\sqrt{2}/2$; **Alege...** A. $BD \subset (C'BD)$, iar $BD \perp (A'AC)$; B. $BC \subset (VBC)$, iar $BC \perp (VOA)$;******************

$C.(VBD) \cap (VAC) = VO$, iar $BO \perp VO$, $AO \perp VO$. **Pag.158.** 1. $EA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$, $AB \subset (ABC)$, $BC \subset (ABC) \Rightarrow EB \perp BC$. 2. AI este mediană în $\triangle ARS$ echilateral $\Rightarrow AI$ este înălțime $\Rightarrow AI \perp RS$. Din $PA \perp (ARS)$, $AI \perp RS$, $AI \subset (ARS)$, $RS \subset (ARS) \Rightarrow PI \perp RS$.

3. a) $EA \perp AB$, $EA \perp AD$, $AB \cap AD = \{A\} \Rightarrow EA \perp (ABC)$. 4. D; 5. Din $MB \perp (ABN)$, $BN \perp NP$, $BN \subset (ABN)$, $NP \subset (ABN) \Rightarrow MN \perp NP$.

6. $AB \perp (BCD)$. Din $AB \perp (BCD)$, $BC \perp CD$, $BC \subset (BCD)$, $CD \subset (BCD) \Rightarrow AC \perp CD \Rightarrow \triangle ACD$ este dreptunghic în C . 7. a) 5; $\sqrt{41}$; 5; b) $EA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$, $AB \subset (ABC)$, $BC \subset (ABC) \Rightarrow EB \perp BC$. Analog $ED \perp DC$. d) $2\sqrt{34}$; 8. b) $\sqrt{6}$; 9. c) $6\sqrt{15}$;

10. b) $2\sqrt{10}$; 7; $3\sqrt{35}/5$; $6\sqrt{182}/13$; 11. c) $5\sqrt{3}$; 13. 10; Alege... A. $4\sqrt{6}$; B. 8; C. $2\sqrt{7}$; **Pag. 161** 1. b) $24; 6\sqrt{3}/7$; 2. $36; 9\sqrt{3}$;

3. $d(E; BD) = ET = a\sqrt{37}/2$; $d(E; CD) = a\sqrt{39}/2$; 4. $d(M; BC) = \sqrt{13}$; $d(M; DC) = 2,5$; 5. $14\sqrt{2}$; $7\sqrt{2}$; 6. a) 9; b) $3\sqrt{21}$; 7. a) $MB = MC = \sqrt{13}$; $\triangle MBC$ nu este dreptunghic; b) $d(M; BC) = 3$, BP mediană. 8. $2\sqrt{729}/5$; 10. a) Aplicăm R_{1-T3p} : $AO \perp (OBC)$, $AD \perp BC$, $OD \Rightarrow OD \perp BC$. Aplicăm R_{2-T3p} : $OH \perp AD$, $AD \perp BC$, $OD \perp BC$, $AD \subset (ABC)$, $BC \subset (ABC) \Rightarrow OH \perp (ABC)$. Alege... A. $3\sqrt{3}$; B. $\sqrt{21}$; C. 12. **Pag.162** 1.a) 15; b) 25; c) $5\sqrt{17}$; 2. $\sqrt{6}$; 3. 12; 4. Sunt paralele. 7.a) $6\sqrt{6}$;

b) $\sqrt{174}/3$; c) $1, 2\sqrt{29}$; **Pag.163. Testul 1.** 1. $CG \subset (ACG)$ și $CG \perp (ABC)$; 2. Segmentul care unește centrele bazelor; 4. 30° . **Testul 2.** 1. $AB \subset (ABG)$ și $AB \perp (BCG)$; 2. Segmentul determinat de centrele fețelor $AECB$ și $LGIR$; 4. 30° .

Unitatea 7. Pag. 164. Autoevaluare 1. B. 2. D. 3. C. 4. B. 5. A. 6. A. **Pag. 165. Test inițial 1.** 9.2. 8.3. 18.4. A. 5. B. 6. 30 cm^2 . 7. Află rap. ariilor celor două trapeze. $\frac{b}{B} = \frac{1}{3}$. 8. $A_1 = A_2 = 3 \text{ cm}^2$. 9. 288 cm^3 . **Pag. 169.** 1. a) 60° ; b) 45° ; c) 30° . 2. a) 4 cm; b) 90° ;

c) 60° ; 3. 45° ; 4. a) 60° ; b) $30\sqrt{3} \text{ cm}$; c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; 5. a) 60° ; b) 45° ; c) 30° ; d) 2. 6. a) 0° ; b) 90° ; c) 45° ; d) 60° ; e) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; f) 0° ; g) 0° ; h) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; i) $\sqrt{2}$.

7. a) $\frac{1}{\sqrt{13}}$; b) 1,5; c) $\frac{4\sqrt{3}}{13}$; d) $\frac{2\sqrt{30}}{13}$; e) $\frac{12}{13}$; f) $\frac{3\sqrt{13}}{26}$; g) $\frac{3}{4}$. Alege... A. 1,5; B. $5\sqrt{3}$; C. $\frac{3\sqrt{3}}{7}$. **Pag. 171.** 1. a) $ED = 16\sqrt{3} \text{ cm}$; b) $AB = 12 \text{ cm}$;

c) $EB = 12 \text{ cm}$; d) $DC = 8\sqrt{3} \text{ cm}$. 2. a) $\sqrt{91}$; $3\sqrt{3}$; b) 10; 6; c) $\sqrt{91}$; $3\sqrt{3}$. 3. a) $\sqrt{15}$; $2\sqrt{3}$; b) $3\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$; c) $3\sqrt{7}$; 6. 4. a) $4\sqrt{2}$; b) $4\sqrt{3}$;

c) $2\sqrt{6}$; d) $4\sqrt{2}$; e) 4; f) $2\sqrt{5}$; g) $2\sqrt{5}$; h) 2; i) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 5. 39. 6. a) $2\sqrt{6}$; b) $4\sqrt{6}$; c) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$. 7. 11. 8. 62,4. 9. Da, dist. este aprox. 4,36 m. 10. a) $4\sqrt{6}$;

b) $12\sqrt{2}$. 11. $h = \frac{2\sqrt{6}}{3} \approx 1,63 \text{ cm}$. Alege... A. 10. B. 3. C. $3\sqrt{3}$. **Pag. 174.** 1. a) 900 m^3 ; b) 2250 t . 2. 52; 24; $\sqrt{29}$. 3. 12. Nu. 4. a) 1000 cm^3 ; b) 6. c) $2,16 \text{ kg}$. 5. $L \cdot h = 36 \text{ m}^2$; $l \cdot h = 24 \text{ m}^2$; $L \cdot l = 54 \text{ m}^2$. $V = 216 \text{ m}^3$. 6. $l = 4 \text{ cm}$. $A_t = 96 \text{ cm}^2$; $V = 64 \text{ cm}^3$.

8. $V = 27\sqrt{2} \text{ cm}^3$, sau $V = 9\sqrt{6} \text{ cm}^3$. 9. a) 1728 cm^3 ; b) 60° ; c) $3\sqrt{2} \text{ cm}$. 10. a) $AB = 4 \text{ cm}$. $A_t = 96 \text{ cm}^2$; $V = 64 \text{ cm}^3$; b) $\frac{1}{5}$. **Pag. 174. Alege...** A. 216 cm^2 ; 216 cm^3 . B. 25 cm. C. $A = 88 \text{ cm}^2$, $V = 48 \text{ cm}^3$. **Pag. 176.** 1. $V = 4800 \text{ cm}^3$; $A_t = 960 \text{ cm}^2$; $A_t = 1760 \text{ cm}^2$. 2. a) $l = 0,3 \text{ m}$ și $h = 0,5 \text{ m}$. $V = 0,045 \text{ m}^3$; b) $A_t = 0,78 \text{ m}^2$. 6. $BG = CG = \sqrt{3} \text{ cm}$; $FG = EG = \sqrt{h^2 + 3} \text{ cm}$.

Triunghiul EFG poate fi dr. doar în G. $V = \frac{27\sqrt{2}}{8} \text{ cm}^3$. 7. a) $V = 12000\sqrt{3} \text{ cm}^3$; b) $h_{cutie} = 10\sqrt{3} \text{ cm}$. $\sqrt{300} \text{ cm} < \sqrt{324} \text{ cm} \Rightarrow 10\sqrt{3} \text{ cm} < 18 \text{ cm}$. 8. $A_t = (72 + 144\sqrt{2}) \text{ cm}^2$; $V = 216\sqrt{2} \text{ cm}^3$. 9. a) 6; b) $\sqrt{6}$. 10. $A_t = 8(3 + \sqrt{3})^2(6 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2 \approx 1385 \text{ cm}^2$; $V = (1440 + 864\sqrt{3}) \text{ cm}^3 \approx 2936 \text{ cm}^3$. 11. $A_t = 2,5 \text{ m}^2$. 13. $A_t = 186 \text{ cm}^2$; $V = 126 \text{ cm}^3$. 14. $\approx 57,73\%$. Alege...

A. 40 cm. B. $2\sqrt{3} \text{ cm}^3$. C. 30 cm^2 . **Pag. 180.** 1. 4 cm. 2. 12 mm^2 . 4. Folosim egalitatea: $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. 5. a) $h_A = d[A, (SBC)] = 3\sqrt{3} \text{ cm}$. b) 30° . 6. a) $a_p = 8\sqrt{3} \text{ cm}$; $a_b = 12 \text{ cm}$; $A_t = 864 \text{ cm}^2$; $V = 1728 \text{ cm}^3$; b) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; c) $V = 512 \text{ cm}^3$. 7. a) $A_t = (96 + 32\sqrt{3}) \text{ cm}^2$; b) $h = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$; $V = \frac{256}{3} \text{ cm}^3$. 8. $l = 6$, $A_t = 36\sqrt{3}$; $V = 18\sqrt{2}$. 9. a) $V = 1152\sqrt{3} \text{ cm}^3$, $A_t = (144\sqrt{3} + 144\sqrt{39}) \text{ cm}^2$;

b) 8 cm. c) $\frac{2}{3}$. 10. 6. 11. Rap. vol. a două piramide asemenea este egal cu k^3 , unde k este rap. de asemănare. Din $1,728 < 2 < 2,197 \Leftrightarrow (1,2)^3 < (\frac{H}{h})^3 < (1,3)^3 \Rightarrow 1,2 < \frac{H}{h} < 1,3$. 12. a) $A_t = 432\sqrt{3} \text{ cm}^2$; $V = 576\sqrt{3} \text{ cm}^3$. b) 18. c) $12 - 6\sqrt{2}$. Alege...

A. 144; B. $36\sqrt{3}$; C. $54\sqrt{2} + 36\sqrt{3}$; $36\sqrt{2}$. **Pag. 182.** 1. 80 cm^2 . 2. 2 m^2 . 3. $a_p = 2,4 \text{ m}$, $A_t = 14,4 \text{ m}^2$. 6. $A_t = 144\sqrt{7} + 144$; $V = 288\sqrt{6}$. 7. $A_t = 32 \text{ dm}^2$; $A_t = 48 \text{ dm}^2$. 8. a) 2370334 m^3 ; b) $1185,167 \text{ km}$. 9. a) $A_b = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2$; $A_t = 54\sqrt{15} \text{ cm}^2$; $V = 324$;

b) 60° ; c) $\frac{4}{5}$; d) $40,5 \text{ cm}^3$. 10. 6 dm. 11. a) $V = 3072 \text{ cm}^3$; $A_t = 960 \text{ cm}^2$; b) $\frac{3}{5}$. 12. $AE = 10\sqrt{3} \text{ cm}$. 13. $A_t = 375 \text{ c}$; $A_t = 600$; $V = 750$. 14. $A_t = 216\sqrt{3} + 108\sqrt{21}$, $V = 648\sqrt{3}$. Alege... A. 3. B. $\frac{256}{9}$. C. 10 cm. **Pag. 186.** 1. 84 cm^2 . 2. 12 m. 3. 3 cm.

4. 28 l. 8. $h = \frac{200\sqrt{3}}{37} \text{ cm} = \frac{\sqrt{120000}}{37} \text{ cm} < 9,37 \text{ cm} < 10 \text{ cm}$. 9. a) $A = (117\sqrt{3} + 270) \text{ cm}^2$, $V = 171\sqrt{11} \text{ cm}^3$; b) $3\sqrt{11} \text{ cm}$. 10. $A_t = 92\sqrt{3} \text{ cm}^2$; $V = \frac{152\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$. 11. a) $V_1 = 216 \text{ cm}^3$; $V_2 = 1728 \text{ cm}^3$; b) $A_t = (180 + 108\sqrt{2}) \text{ cm}^2$. Alege... A. 30 cm^2 . B. 940,8 kg. **Pag. 187.** 1. a) $A_t + A_b = 63 \text{ m}^2$; 1575 lei. b) 180 lei. 2. De 3 ori. 3. a) $V = 1680\sqrt{3} \text{ mm}^3$; b) $A = (1680 + 336\sqrt{3}) \text{ mm}^2$. 4. $A_t = \frac{3(L+l) \cdot 4}{2} = 72 \text{ cm}^2 \Rightarrow L + l = 12 \text{ cm}$. $P = 18 \text{ cm}$, $A = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$. 5. a) $A = 324\sqrt{3} \text{ mm}^2$; b) $h = 6\sqrt{6}$, $V = 486\sqrt{2}$. 6. 64 cm^3 . 7. a) $\frac{\sqrt{19}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{7}}{2}$. 8. Lichidul va lua forma unei prisme drepte cu baza cubului mare și înălț. egală cu muchia cubului mic, având în interior cubul mic. $V = (10 \text{ dm})^2 \cdot 1 \text{ dm} - 1 \text{ dm}^3 = 99 \text{ dm}^3 = 99 \text{ l}$. 9. Raportul de asemănare este $\frac{1}{4}$, deci raportul volumelor este $\frac{1}{64}$. 10. Când vasul este așezat pe o față laterală, spațiul gol are forma unei prisme triunghiulare

regulate cu baza triunghi echilateral de latură x ; $\frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot 12\text{cm}^3 = 216\sqrt{3}\text{cm}^3$, deci $x = 6\sqrt{2}\text{cm}$. Înălțimea la care se ridică apa este $(6\sqrt{3} - 3\sqrt{6})\text{cm}$. **11. a)** De ex., muchia opusă vârfului A este $B'C'$; **b)** De ex., $A'M$ se calculează din triunghiul dreptunghic $A'M$; toate aceste triunghiuri dreptunghice sunt congruente; **c)** Deducem că înălțimile triunghiului ABC sunt congruente, deci acest triunghi este echilateral. **12.** $A_t = 15000\sqrt{2} + 25000\text{cm}^2$; $V = \frac{875000\sqrt{2}}{3}\text{cm}^3$. **13.** $54\sqrt{3}\text{cm}^3$. **14.** $A_t = 216\text{cm}^2$; $V = 216\text{cm}^3$. **15.** $A_t = 36(3 + \sqrt{3})\text{cm}^2$, $V = 72\sqrt{2}\text{cm}^3$. **16. a)** $DEFGHI$ este hexagon regulat. **b)** Împarte triunghiul ABC în 9 triunghiuri echilaterale. **17. a)** Aprox. 185cm^2 . **18.** $\sqrt{6}$. **19. b)** 10cm ; 15cm ; 1500cm^3 ; **c)** muchia bazei = 20cm ; înălțimea = 15cm ; $V = 2000\text{cm}^3$; **d)** $V = 750\text{cm}^3$; **e)** $6500 = 1500 + 2000 + 4 \cdot 750$. **Pag. 189. Testul 1. 1.** $A_t = 6\text{m}^2$; $V = 1\text{m}^3$. **2.** $5\sqrt{2}\text{cm}$. **3.** 3dm . **4.** $A_t = 576\text{cm}^2$; $V = 864\text{cm}^3$. **5.** $l = 2\text{cm}$. $A_t = (3 + \sqrt{3})\text{cm}^2$; $V = \frac{\sqrt{2}}{3}\text{cm}^3$. **Testul 2. 1.** $V = 50\text{cm}^3$, $A_t = 130\text{cm}^2$; **2.** 45° . **3.** 75° . **4.** $A_t = (6 + 2\sqrt{3})\text{cm}^2$; $V = \sqrt{3}\text{cm}^3$. **5.** $A_t = 96\text{cm}^2$; $V = 48\text{cm}^3$.

Unitatea 8. Pag. 190. Autoevaluare 1. A. 2. C. 3. B. 4. B. Pag. 191. Test inițial. I. 1. diametru; **2. 6; 3. 6; II. 4. D; 5. B; III. 6. 6π ;**

7. 20π ; 8. Caz LUL de asem.; $4/9$. **Pag. 193. 1.** $282,6\text{ l}$; **3.** 72cm^2 , $432\pi\text{cm}^3$, $360\pi\text{cm}^2$; **4.** 120 ; **5.** $A_t = 100\pi\text{cm}^2$, $V = 125\pi\text{cm}^3$;

6. $R = 2\sqrt{2}\text{cm}$, $A_t = 32\pi\text{cm}^2$, $A_l = 48\pi\text{cm}^2$, $V = 32\pi\sqrt{2}\text{cm}^3$; **7.** $36/\pi\text{m}^3 > 24/\pi\text{m}^3$; dacă $h = 4\text{m}$; **8.** $A_t = 288\pi\text{cm}^2$,

$V = 640\pi\text{cm}^3$; **9.** $2/\pi$; **10.** $5,226\text{ kg}$; **11.** $684\pi^2\text{cm}^3 \approx 6750\text{cm}^3$; **12.** $\sqrt{4\pi^2 + 1} > 6$; **14.** $A_t = 24\pi(1 + \sqrt{2})\text{cm}^2$, $V = 24\pi\sqrt{6}\text{cm}^3$;

16. Desfășurarea unei prisme patr. reg. cu $l = 20\text{cm}$ și $h = 30\text{cm}$ se încadrează în cartonul dat; **17.** $A_t = 520\pi\text{cm}^2$, $V = 1600\pi\text{cm}^3$;

Alege... **A.** $60\pi\text{cm}^2$; **B.** $V = \pi\text{dm}^3 < 4$; **C.** $G = 4\text{cm}$, $A_t = 64\pi\text{cm}^2$, $V = 64\pi\text{cm}^3$. **Pag. 197. 1.a)** $V \approx 2,41\text{m}^3 > 2\text{m}^3$; **b)** $A_t \approx 7,54\text{m}^2 > 7\text{m}^2$;

2. A_t a conului; **4.** $V_1 < V_2$; **5.** 15cm ; **6.** $6 - 3\sqrt{2}\text{cm}$; **7.** Se arată că dacă $\pi RG = \pi(R+1)(G+1) - 10$, atunci $\pi RG < 4$; **8.** $R = 1,5\text{cm}$; **9. a)** $R = h = 3\text{cm}$; **b)** $1,5\text{cm}$; **10.** Mati, dublu față de Ana; **11.** 2mm ; **12.** $9:10$; **13.** Drumul cel mai scurt are $30\sqrt{6}\text{cm}$; cel prin

B $20\pi\sqrt{2}\text{cm}$; **14.** Cele trei generatoare sunt muchiile laterale ale piramidei triunghiulare regulate cu baza triunghiul

echilateral înscris în centrul bazei și vârful identic cu al conului. **Alege...** **A.** $12\pi\text{cm}^3$; **B.** $A_t = 27\pi\text{mm}^2$, $V = 9\pi\sqrt{3}\text{mm}^3$;

C. $A_t = 24\pi\text{cm}^2$, $V = 12\pi\text{cm}^3$. **Pag. 200. 1. a)** $V = 31\pi\text{dm}^3 > 90\text{l}$; **b)** $A_t = 30\pi\text{dm}^2 \approx 94,2\text{dm}^2$; **3. a)** Formulele pt. cilindru;

b) Formulele pt. con; **4.** $A_t = 168\pi\text{cm}^2$, $V = 224\pi\text{cm}^3$; **5.** $h = \sqrt{441 - 324/\pi^2} \approx 20,2 > 20\text{cm}$; **6.** $16\pi\text{cm}^2$; **7.** $\approx 11\text{l}$; **8.**

a) $A_t = 432\pi\sqrt{2}\text{cm}^2$, $V = 6944\pi\sqrt{2}/3\text{cm}^3$; **b)** Se află sinusul unghiului, $45^\circ < \alpha < 60^\circ$; **9.** $\approx 39,2\text{t}$; **10.** $A_t = 360\pi\text{cm}^2$, $V = 672\pi\text{cm}^3$;

11. 5190m ; **Alege...** **A.** 4cm ; **B.** $A_t = 167\pi\text{cm}^2$, $V = 129\pi\sqrt{3}\text{cm}^3$; **C.** $A_t = 54\pi\text{cm}^2$, $V = 63\pi\sqrt{3}\text{cm}^3$. **Pag. 203. 1.** $A = 64\pi\text{cm}^2$,

$V = 256\pi/3\text{cm}^3$; **3. a)** $288\pi\text{cm}^3$; **b)** $36\pi\text{cm}^2$; **4.** $3 \cdot 5 = 15 < 16$; da; **5.** Da; **6.** $35\pi\text{cm}^2$; **7.** $\approx 8373\text{cm}^3$; **8.** Ambele arii sunt $4\pi R^2$;

9. Un cub cu vârfurile pe sferă are muchia $7/\sqrt{3} > 4\text{cm}$; din el pot fi obținute cele 64 cubulețe; **10.** $A_t = 32\pi(\sqrt{3} + 1)\text{cm}^2$,

$V = 256\pi/3\text{cm}^3$; **11.** $48,8\%$; **12.** 24mm ; **13.** $R = 10\text{cm}$; **14.** Împărțim sfera în 8 corpuri egale, cu ajutorul a trei cercuri cu planele

perpendiculare două câte două. Fiind 9 puncte, cel puțin două vor aparține unui astfel de corp. Distanța maximă este $\sqrt{2}$; **15.**

Folosim triunghiurile isoscele cu vârfurile în centrul sferei având ca baze diagonale ale fețelor prisme; obținem latura bazei

de $3\sqrt{3}\text{cm}$ și înălțimea prisme de $3\sqrt{10}\text{cm}$. **16.** $\approx 52,3\%$; **Alege...** **A.** $\approx 157\text{g}$; Nu; **B.** $13,4$; **C.** $3\sqrt{6}\text{cm}$. **Pag. 204.**

1. $A_t = 96\pi(\sqrt{3} + 1)\text{cm}^2$, $V = 576\pi\text{cm}^3$; **2.** $156\pi\text{cm}^3$; **3.** $8/27$; **4.** $3272\pi\text{mm}^3$; **5.** $V \approx 718\text{cm}^3$; Nu; **6.** $15,7\text{m}$; **7.** 18000 ; **8.** $\approx 11,3\text{kg}$;

9. Cel de 10kg ; **10.** Diametrul sferei este egal cu diagonala prisme; **11.** $12\pi\text{cm}^2$; **13.** a) 1300π ; b) 17 ; **14.** a) $3\pi \approx 9,42\text{m}^2$;

$V_{\text{con}}/V_{\text{cub}} = 3\pi/64 \approx 0,147$; **15.** Ghemul are $V \geq 75\pi/2\text{cm}^3$; **17.** Centrele sferelor sunt vârfurile unui tetraedru regulat, cu laturile de 20cm și înălțimea $20\sqrt{6}/3\text{cm}$. Înălțimea construcției este $20\sqrt{6}/3 + 20 \approx 36,3\text{cm}$. **Pag. 205. Testul 1. 1.** $A_t = 9\pi(2\sqrt{3} + 3)\text{cm}^2$, $V = 27\pi\text{cm}^3$; **2.**

$6,28\text{ l}$; **3.** $A_t = \frac{1701\pi}{16}\text{m}^2$, $V = \frac{2187\sqrt{7}\pi}{64}\text{m}^3$; **4.** 64 ; **5.** $A_t = 144\pi\text{cm}^2$, $V = 128\pi\text{cm}^3$. **Testul 2. 1.** $200\pi\text{m}^2$; **2.** 5000 l ; **3.** $A_t = 324\pi\text{cm}^2$, $V = 432\pi$

cm^3 ; **4.** $A = 36\pi\text{cm}^2$, $V = 36\pi\text{cm}^3$; **5.** Cel mai scurt drum are 24cm , fiind înălțimea unui triunghi dreptunghic cu laturile 30cm , 40cm , 50cm .

Teste de Antrenament Pag. 206. Testul 1. S I. 1.d. 2.b 3.c. 4.b. 5.d 6.a. S II. 1.d. 2.a. 3.d. 4.a. 5.c. 6.b. S III. 1. a) Nu, deoarece

efectuând calculele Lizei, obținem 53 . **b)** Dacă x este nr. ales de Liza, atunci $\frac{6x+7}{5} = 41$; $x = 33$. **2. a)** $x = 2^{35}$; $(2^2)^{10} + 2^{15} =$

$2^{15} + 2^{15} = 2 \cdot 2^{15} = 2^{16}$; **b)** $y = \sqrt{2^{30}(1+2^3)} = 2^{15} \cdot 3$ și $x + y = 2^{16} + 3 \cdot 2^{15} = 5 \cdot 2^{15}$, deci $x + y : 5$. **3. a)** $|1 - 2\sqrt{2}| =$

$2\sqrt{2} - 1 < 2 \cdot 1,5 - 1 < 3$; $\sqrt{2} \in A$. **b)** $|1 - 2x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 1 - 2x \leq 3 \Leftrightarrow -4 \leq -2x \leq 2 \Leftrightarrow 2 \geq x \geq -1 \Leftrightarrow A = [-1; 2]$.

$A \cap \mathbb{Z} = \{-1; 0; 1; 2\}$. **4. a)** $\sphericalangle FCD = \sphericalangle FCA - \sphericalangle DCA = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$, deci $\sphericalangle ECF = \sphericalangle ECD - \sphericalangle FCD = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$. **b)**

$CE \equiv CB, CF \equiv CA, \sphericalangle ECF \equiv \sphericalangle ACB$, deci $\triangle CEF \equiv \triangle CBA$ (L.U.L.). **5. a)** $\frac{AE}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{2}{5}$, deci $AE = \frac{2}{5} \cdot AB = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4$ cm. **b)** $BE = BC = 6$ cm, $\triangle EBC$ este isoscel, $AB \parallel CD \Rightarrow \sphericalangle ECB \equiv \sphericalangle CEB \equiv \sphericalangle ECD \Rightarrow CE$ este bis. $\sphericalangle BCD$. **6. a)** Muchia cubului are 6 cm, iar $\triangle A'BD$ este echilateral, cu latura $6\sqrt{2}$ cm. **b)** Muchiile tetraedrului $A'C'BD$ sunt diagonale ale fețelor cubului, deci sunt congruente.

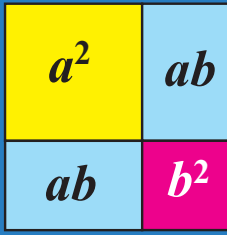
Testul 2. S I. 1. d. 2. b 3. c. 4. b. 5. c 6. b S II. 1. b 2. a. 3. c 4. a. 5. b 6. b. S III. 1. a) Nu. Dacă Dan ar avea 150 lei, atunci Radu ar avea 90 lei; după ce Dan dă 10 lei, el ar rămâne cu 140 lei, iar Radu ar avea 100 lei. Dar $140 \neq 2 \cdot 100$. **b)** Fie x cât are Radu. Atunci Dan ar avea $240 - x$ și $(240 - x) - 10 = 2(x + 10)$; $x = 70$ lei. **2. a)** $I \cap \mathbb{Z} = (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cap \mathbb{Z} = \{-1; 0; 1\}$, deci are 3 elemente. **b)** $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$, deci sunt 4 valori posibile. **3. a)** $E(x) = 2(4x^2 + 4x + 1) - (x^2 - 4x + 4) - (9x^2 - 1) + (2x^2 - 2x - 6x + 6) = 4x + 5$. **b)** $|4a + 5| \leq 7 \Leftrightarrow -7 \leq 4a + 5 \leq 7 \Leftrightarrow -3 \leq a \leq 0,5$. Deoarece $a \in \mathbb{Z}$, $a \in \{-3; -2; -1; 0\}$. **4. a)** Aplicăm

Teorema lui Pitagora în $\triangle ABD$; **b)** $\triangle ADB \sim \triangle EFB$ (U.U.), deci: $\frac{BE}{BD} = \frac{BF}{BA} = \frac{EF}{AD}$, $FD = \frac{6\sqrt{5}}{5}$. **5. a)** F este centrul de greutate al $\triangle BCD$, deci $EF = EC/3 = AC/6 = 2,5$ cm. **b)** $\triangle BEF$ are aria $\frac{A(BEC)}{3}$, deci $A(BEF) = 9$ cm². $\triangle BEM$ are aria $\frac{A(ABE)}{2}$, deci $A(BEM) = 13,5$ cm². $A(BFEM) = 22,5$ cm². **6. a)** Dacă O este centrul bazei, EO este linie mijlocie în $\triangle SBD$, deci $EO \parallel SD$. **b)** În $\triangle SBD$ echilateral, $BF \perp SD$, deci $BF \perp EO$. Dar $AC \perp (SBD)$, deci $AC \perp BF$. Deducem că BF este perpendiculară pe două drepte concurente din (ACE) .

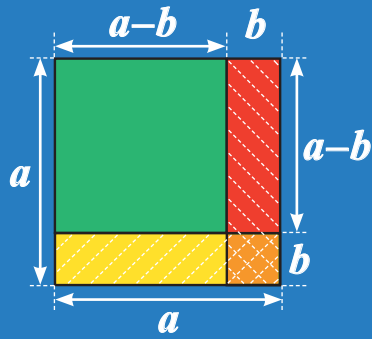
Testul 3. S I. 1. c. 2. d. 3. b. 4. a. 5. a. 6. c. S II. 1. b. 2. c. 3. a. 4. a. 5. d. 6. c. S III. 1. a) Nu, deoarece 30% din temă reprezintă mai mult decât o pătrime, care înseamnă 25% din aceasta. **b)** Dacă x este nr. total de probleme, atunci $\frac{3}{10}x + \frac{x}{4} + 9 = x$. $x = 20$. **2. a)** $a = 2 + 2\sqrt{3} + 1 - \sqrt{12} + 1 = 4 \in \mathbb{Z}$; **b)** $b = (\sqrt{5} - \sqrt{4} + \sqrt{6} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{6} + 2) = (\sqrt{6} - 2) \cdot (\sqrt{6} + 2) = 2$, deci $a = b^2$. **3. a)** $E(x) = -3x^2 + 5x - 2 = -3x^2 + 3x + 2x - 2 = -3x(x - 1) + 2(x - 1) = (x - 1)(2 - 3x)$. **b)** $E(0) = -2$ și ecuația devine $-3x^2 + 5x = 0$ cu soluțiile 0 și 5/3. **4. a)** Dacă trapezul este $ABCD$, cu baza mare AB , $\triangle DCB$ este isoscel (cu $DC = CB$), deci $\sphericalangle CDB \equiv \sphericalangle CBD$; cum $CD \parallel AB$, avem $\sphericalangle CDB \equiv \sphericalangle DBA$, deci $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBD$ și BD este bisectoarea $\sphericalangle ABC$. Analog AC este bisectoarea $\sphericalangle ADB$. **b)** $AD = DC = CB = 10$ cm, înălțimea trapezului are $5\sqrt{3}$ cm, iar diag. au $10\sqrt{3}$ cm. În $\triangle ABC$ se aplică reciproca Teoremei lui Pitagora. **5. a)** $ED \parallel AB \Rightarrow \frac{DF}{AF} = \frac{DE}{AB}$; $DE = 2$ cm, deci $DF = \frac{9}{4}$ cm. **b)** $\triangle FBA \sim \triangle BEC$, cu rap. de asemănare 9/8, deci raportul ariilor este 81/64. **6. a)** Construim $DE \perp AC$, cu $E \in AC$ și, cum $(ADC) \cap (ABC) = AC$, iar $(ADC) \perp (ABC) \Rightarrow DE \perp (ABC)$. Construim $EF \perp AB$, $F \in AB$ și din T3 $\Rightarrow DF \perp AB$ și $\sphericalangle((ABD), (ABC)) = \sphericalangle DFE$; $AC = 25$ cm, $DF = 12$ cm, $EF = 27/5$ cm și $\text{tg}(\sphericalangle DFE) = DE/FE = 20/9$. **b)** $d(D, AB) = DF = 3\sqrt{481}/5$ cm.

Testul 4. S I. 1. b. 2. d. 3. b. 4. b. 5. c. 6. a. S II. 1. d. 2. c. 3. c. 4. a. 5. b. 6. a. S III. 1. a) x al treilea număr, $2x + 1$ al doilea, $x + 36$ primul. Cum x este natural, al treilea este cel mai mic. **b)** $x + 36 = 6(2x + 1 - x)$; $x = 6$. **2. a)** $f(-\sqrt{2})f(\sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$; **b)** $|x_Q + 1|/2 = 1$ și obținem $x_Q = 1$ sau $x_Q = -3$. **3. a)** $E(2) = \left(3 - \frac{2}{3} - \frac{10}{5}\right) : \frac{3}{3} = \frac{1}{3}$. **b)** $E(x) = \frac{3}{x-1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{3} - \frac{x}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-1}{3} - \frac{2(x+3)}{(x-1)(x+3)} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{3} = \frac{1}{3}$. $N = 9$, pătrat perfect. **4. a)** $\sphericalangle BAD = 60^\circ$ și $\triangle ABD$ isoscel $\Rightarrow \triangle ABD$ echilateral. **b)** În $\triangle ABC$, BO și AM mediane, deci E este centrul de greutate; $BO = 3EO = 6$ cm. Cum $\triangle ABD$ ech., $AB = BD = 2BO = 12$ cm. $P_{ABCD} = 4AB = 48$ cm. **5. a)** $NP \parallel AC \Rightarrow \frac{PB}{PC} = \frac{NB}{NA} = \frac{1}{3} \Rightarrow NA = 3NB$. **b)** $NR \parallel BC \Rightarrow \frac{NA}{NB} = \frac{RA}{RC}$ și $RQ \parallel AB \Rightarrow \frac{RA}{RC} = \frac{QB}{QC}$. Deci, $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QB}{QC} = \frac{NB}{NA} \cdot \frac{RA}{RC} = \frac{NB}{NA} \cdot \frac{NA}{NB} = 1$. **6. a)** $A_t = AB^2\sqrt{3}$, $A_t = \frac{6AB \cdot h + AB^2\sqrt{3}}{2}$, $h = \frac{AB\sqrt{3}}{6}$ și $V = \frac{AB^3}{8} = 27$. **b)** $OMM'O'$ dreptunghi, $OM = MM' = \frac{AB\sqrt{3}}{6}$, deci $OMM'O'$ este pătrat. $\sphericalangle(MO', AA') = \sphericalangle(MO', OO') = \sphericalangle MO'O = 45^\circ$.

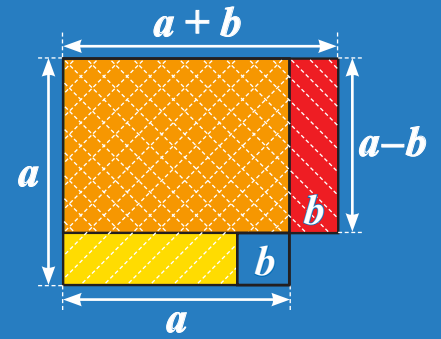
Testul 5. S I. 1. c 2. a 3. b 4. a 5. c 6. a S II. 1. d 2. d 3. a 4. a 5. b 6. c S III. 1. a) Fie S_1 suma notelor. $S_1/360 = 7,35 \Rightarrow S_1 = 2646 \in \mathbb{N}$, așadar pot fi 360 elevi. **b)** Fie n - nr. elevilor. $n : 20$ și $n : 25 \Rightarrow n$ este multiplu comun al lui 20 și 25. $[20; 25] = 100$ și nr. care corespunde este $n = 400$. **2. b)** $\sigma = -2$, care nu aparține mulțimii de def. a expresiei. Ecuația nu are soluții. **3. a)** A se golește în $360 : 3 = 120$ s. După x secunde, din A s-au scurs $3x$ litri apă. $f : [0; 120] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 360 - 3x$. **b)** După x secunde, în B sunt $40 + 3x$ litri apă. $g : [0; 120] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 40 + 3x$. **4. a)** Notăm M mijlocul lui BC . $CM = 3$ cm, deci $EM = 1$ cm. Deoarece $CD/DA = CE/EM$, din Reciproca T. Thales $\Rightarrow DE \parallel AM$ și cum $AM \perp BC \Rightarrow DE \perp BC$. **b)** $\triangle ABC$ are aria $9\sqrt{3}$ cm²; în $\triangle CDE$, obținem $DE = 2\sqrt{3}$, deci $A_{CDE} = 2\sqrt{3} \Rightarrow A_{ABED} = 9\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$ cm², de unde deducem că raportul cerut este $2/7$. **5. a)** Fiecare din cele 8 arce are $360 : 8 = 45^\circ$. $\sphericalangle FGD$ și $\sphericalangle ADG$ sunt alt. int. congruente, deoarece $\sphericalangle FGD = FED/2 = 90^\circ/2 = 45^\circ$, iar $\sphericalangle ADG = AHG/2 = 90^\circ/2 = 45^\circ$. **b)** $8 \cdot A_{AOB} = (8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 45^\circ)/2 = 2\sqrt{2}$ m². Masa cântărește $2\sqrt{2} \cdot 15 = 30\sqrt{2}$ kg. Comparăm $30\sqrt{2}$ și 43. **6. a)** Dacă h este înălț. paharului, avem 40% din $h = 4$, de unde $h = 10$ cm. **b)** Raportul dintre volumul conului mic și volumul conului mare este egal cu cubul raportului de asemănare. Dacă V este volumul paharului, avem $24/V = (4/10)^3$. Se obține $V = 375$ ml, așadar mai încăp $375 - 24 = 351$ ml.



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

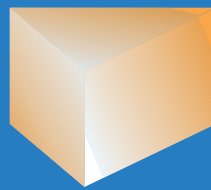


$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$



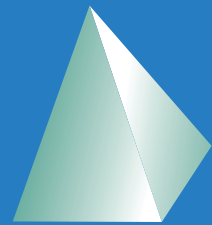
$$A = 6l^2$$

$$V = l^3$$



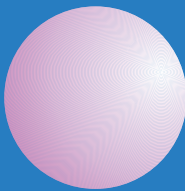
$$A_l = P_b \cdot h$$

$$V = A_b \cdot h$$



$$A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$



$$A = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$



$$A_l = 2\pi R h$$

$$V = \pi R^2 h$$



$$A_l = \pi R h$$

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$